A. hydr. 22m

R

Erweiterung und Berichtigung

der

Theorie des Gebälks,

mit einem Anhange
anderer statischer Untersuchungen,

von

Anton Ritter v. Camerloher,

Königl. baier'schen Ingenieur bey der General-Direktion des Wasser- Brücken- und Straßenbaues.

Mit Figuren.

München 1817.
In Kommission bey Philipp Krüll, Universitätsbuchhändler in Landshut.

Gedruckt mit Zängl'schen Schriften.

Bayerische Staatsbibliothek München

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Wohlgebornen

königlich-baierischen Herrn Wasser-, Brücken- und Straßenbau-Direktor des Main-Kreises

Karl Wiebeking,

Zum Zeichen

wahrer Freundschaft und Hochachtung.

Vorerinnerung.

Vorliegende Abhandlung, wozu mich eine Bemerkung des Rezensenten (den ich im Herrn geheimen Hofrath Langsdorf zu verehren glaube) meines kritischen Kommentars zu der vom kön. baier. Herrn Salinen-Rathe Ritter von Reichenbach herausgegebenen Theorie eiserner Brücken im Nro. 271. der allg. Halle'schen Literatur-Zeitung des Jahres 1814 veranlaßte, ist bloß eine unvollständige Darstellung des combinatorischen Schemas, das sich von ihrem Gegenstande entwickeln läßt; kann aber als ein nicht unbedeutender Beytrag zu der vom kön. preußischen Oberbaurath Eitelwein in seiner Statik fester Körper mitgetheilten Theorie elastischer Linien betrachtet werden.

Möge der Nutzen, den die Leistungen reiner Theorie der Praxis gewähren, auch nur von dem Werthe seyn, welchen nie ganz zutreffende Bau-Anschläge haben: so sind theoretische Forschungen im Gebiete praktischer Wissenschaften, wohin die Baukunde gehört, gewiß nicht zu verachten, und ich glaube daher zur Rettung dieses theoretischen Beytrages den Tadel der blossen Praktiker „oleum et operam perdidi" mit Recht nicht unterschreiben zu dürfen.

München den 30. März 1817.

Der Verfasser.

0. Aufgabe.

Ein Prisma von durchgängig gleicher Elastizität, mit beyden Enden unbeweglich und horizontal in A und B Fig. I. und II. aufgelegt, ist dazwischen irgendwo in C mit einem Gewicht Q beschwert.

In der Voraussezung, daß es nach der Figur a a′ c b′ b B c″ C c′ A Fig. I. oder nach a a′ c‴ c^{IV} b′ b b‴ c″ C c′ a‴ Fig. II. sich beuge, indem seine gedehnten (Leibnitz'sche Hypothese) oder zum Theil gedehnten und zum Theil zusammengepreßten Fasern (Bernoulli'sche Hypothese) in A, C, B die Winkel a A a′ $= \alpha$, c′ c c″ $= \gamma$, b′ B b $= \beta$ bilden, ist die Frage: in welchem Verhältniß muß das Gewicht Q größer seyn, als ein anderes Q′, welches das nämliche Prisma, mit beiden Enden frei und horizontal aufgelegt, im Beschwerungs-Punkte C zu dem nämlichen Winkel γ beugt?

Auflösung.

Die Länge des Prisma im Lichten oder A B sey $=$ c und A C $=$ a. Beugt sich dasselbe, mit beyden Enden frey aufliegend, unter dem Druck des Gewichts

Q′ mit dem Moment $\frac{a}{c}(c-a)Q'$ im Beschwerungs-Punkte C zu dem Winkel γ: so wird es, mit beyden Enden unbeweglich aufliegend, zu dem nämlichen Winkel γ auch sich beugen, wenn zu Q′ in C noch zwey Gewichte q, q′ kommen, welche die Stücke AC, BC des Prisma in A, B zu den Winkeln α, β beugen. Dieses geschieht mittels der Momente a q, (c — a) q′. Da die Beugungswinkel im geraden Verhältniß zu den Beschwerungs- oder Beugungsmomenten stehen, und die Winkel $\alpha+\beta=\gamma$ sind: so muß $aq:(c-a)q' = \alpha:\beta$ und $aq+(c-a)q' = \frac{a}{c}(c-a)Q'$ seyn, woraus $q = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{(c-a)}{c}Q'$ und $q' = \frac{\beta}{\beta+\alpha}\cdot\frac{a}{c}Q'$ hervorgeht. Setzt man $\alpha = \frac{\gamma}{n}$ also $\beta = \frac{(n-1)}{n}\gamma$: so ist $\frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{1}{n}$ und $\frac{\beta}{\alpha+\beta} = \frac{(n-1)}{n}$ also $q = \frac{(c-a)}{nc}Q'$ und $q' = \frac{(n-1)}{nc}a\,Q'$, wovon α, β, n mittels der Gleichung $a\,tg\,\alpha = (c-a)\,tg\,\beta = cc$ Fig. I. trigonometrisch oder durch Verzeichnung gefunden werden können, wenn die Größen c, a und die Beugungstiefe c c bekannt sind. Es ist demnach $q+q' = \left(\frac{c+(n-2)a}{nc}\right)Q'$ und $Q = Q'+q+q' = Q'+\left(\frac{c+(n-2)a}{nc}\right)Q'$ sowohl nach der Leibnitz'schen als nach der Bernoulli'schen Hypothese.

Für $a = \frac{c}{2}$ also $\alpha = \beta = \frac{\gamma}{2}$ wird $Q = Q' + 0,5 Q'$.

Fur $a = \frac{c}{3}$ und $\alpha = 50^\circ$ also $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 80^\circ$ wird $Q = Q' + 0,54. Q'$.

Für $a = \frac{3}{8}$ c und $\alpha = 44^\circ$ also $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 74^\circ$ wird $Q = Q' + 0,52. Q'$.

Sind die Winkel α, β klein, und ist daher die Beugungstiefe c c gering: so verhalten sich $\alpha : \beta$ fast wie $tg\,\alpha : tg\,\beta = (c - a) : a$ und es ist $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{(c - a)}{c}$, $\frac{\beta}{\alpha + \beta} = \frac{a}{c}$ also $Q = Q' + \left(\frac{a^2 + (c - a)^2}{c^2}\right) Q'$.

Für $a = \frac{c}{2}$ wird $Q = Q' + 0,5\, Q'$.

Für $a = \frac{c}{3}$ wird $Q = Q' + 0,55.\, Q'$.

Für $a = \frac{3\,c}{8}$ wird $Q = Q' + 0,53.\, Q'$.

Die Stelle des kleinsten Gewichts, welches ein mit beyden Enden unbeweglich aufliegendes Prisma im Beschwerungspunkt zu einem gegebenen Winkel oder zu einer bestimmten Tiefe zu beugen vermag, trift, wie aus dem Ausdruck des Beugungs-Moments $M = \frac{a}{c}(c - a)\, Q'$, für Q' sein Werth aus der letzten allgemeinen Gleichung gesetzt, sich ergibt, in die Mitte des Prisma. Bricht das frey aufliegende Prisma unter dem Gewicht Q' in Beschwerungspunkt C: so wird das mit beyde Ende unbewegliche unter Q zu-

erst im Beschwerungspunkt C und dann auch in A und B brechen.

Ist das Prisma in B oder A nicht unbeweglich: so wird $Q = Q' + \frac{\alpha}{(\alpha+\beta)} \frac{(c-a)}{a} Q' = Q' + \frac{(c-a)^2}{c^2} Q'$ beynahe oder $Q = Q' + \frac{\beta}{(\alpha+\beta)} \cdot \frac{a}{c} Q' = Q' + \frac{a_2}{c^2} Q'$ beynahe. Im ersten Falle und zwar

Für $a = \frac{c}{2}$ wird $Q = Q' + \frac{Q'}{4} = Q' + 0,25\, Q'$

Für $a = \frac{c}{3}$ wird $Q = Q' + \frac{4}{9} Q = Q' + 0,44 Q'$

Für $a = \frac{3c}{8}$ wird $Q = Q' + \frac{25}{64} Q' = Q' + 0,39 Q,$

Im zweyten Fall ergeben sich, für (c—a) die drey Werthe von a gesetzt, die vorigen Werthe für Q.

Eben so wie vorhin wird die Stelle des kleinsten Gewichts, unter welcher das Prisma bricht, im ersten Fall für a = 0,59 c und im zweyten Fall für (c—a) = 0,59 c gefunden.

Mushenbroek, Parent, Belidor, Buffon, Camus de Meziers, Eitelwein und mehr andere stellten über die Tragbarkeit kleiner Stäbchen von verschiedenen Holzarten Versuche an. Es genüge hier bloß die Anführung folgender von Belidor und Parent mit eichenen in der Mitte nach und nach beschwerten Stäben oder Latten angestellten Versuche!

1. Versuch, welcher mit einem ähnlichen von Parent übereinstimmt. Eine Latte, 18 Zoll lang und 1 Zoll ins Geviert dick, mit beyden Enden frey auflie-

gend, trug im Moment des Bruches in der Mitte 406 Pfund.

2. Versuch. Eine Latte von den vorigen Dimensionen, aber an beyden Enden durch eiserne Klammern fest gehalten, trug, ehe sie in der Mitte brach, 600 Pfund. An den Enden war sie bloß krumm gebogen, indem die Klammern denselben Spielraum, sich zu drehen, gelassen.

Nach Parent's Versuch trug eine 11 Zoll lange, und 5 bis 6 Linien im Durchschnitt starke Latte, mit beyden Enden auf der schmalen Seite frey aufliegend, 34½ Pfund; an den Enden aber eingeschlossen, trug sie 51 Pfund, ehe sie brach. Der 7te und 8te Versuch von Parent beweisen das nämliche Verhältniß 2 : 3, den beyden Zuständen der Ende entsprechend.

3. Versuch. Eine 18 Zoll lange, 1 Zoll auf 2 Zoll ins Geviert starke Latte, auf der platten Seite frey aufliegend, trug vor dem Bruch 805 Pfund.

4. Versuch. Eine andere, von den vorigen Dimensionen, trug auf der frey aufliegenen schmalen Seite 1580 Pfund, ehe sie brach.

5. Versuch. Eine Latte, von 3 Schuh Länge und einem Zoll Durchschnitts-Stärke, trug frey aufliegend 187 Pfund, indem sie brach.

6. Versuch. An beyden Enden befestigt trug eine der vorigen gleiche Latte 283 Pfund, ehe sie in der Mitte und an den beyden Enden brach.

7. Versuch. Eine 3 Schuh lange und 2 Zoll ins Geviert starke, frey aufliegende Latte trug brechend 1585 Pfund.

8. Versuch. Eine Latte von 3 Schuhe Länge und von 20 auf 28 Linien im Durchschnitt, brach auf der schmalen Seite frey aufliegend, mit 1660 Pfund.

Aus diesen Versuchen erhellet, daß eine an beyden Enden befestigte Latte die Hälfte des Gewichts, unter dem sie frey aufliegend bricht, mehr tragen könne, oder eine frey aufliegende Latte ein Dritttheil des Gewichts, unter dem sie, an beyden Enden befestigt, bricht, weniger trage. Resultate, welche mit der Anfangs gegebenen Berechnung auffallend übereinstimmen!

Dabey erinnere ich, was Milizia im Kapitel über den Widerstand der Baumaterialien anführt: „Wenn ein fester Körper auf 2 Unterlagen horizontal und unbeweglich aufliegt, und er bricht: so geschieht das Brechen an 3 Stellen, in der Mitte und an den beyden Enden. Die Schwere der Mitte übt den dritten Theil ihrer Kraft auf jede der drey Stellen, die brechen wollen, aus; daher ist ein an beyden Enden recht wohl befestigter Körper um ein Dritttheil stärker als einer, der nur bloß aufliegt.“ Das Oberflächliche und Unzuläßliche dieser Erklärung der Brüche umgehend, bemerke ich noch, was Succow in seiner bürgerlichen Baukunst lehrt: „Ein Balken, sagt er, an beyden Enden fest eingemauert, zerbreche unter der in seiner Mitte angebrachten Last sowohl in der Mitte als an beyden Enden zugleich.“ Obwohl diese angeführten

Versuche und Bemerkungen, welche mit den Resultaten der aufgestellten Theorie so gut harmoniren, die Richtigkeit der dieser Theorie zum Grund liegenden Voraussetzungen zu beweisen scheinen: so kann ich doch nicht umhin, dieselbe in Zweifel zu ziehen. In der Theorie wird durchgängig gleiche Elastizität des Körpers und vollkommene Befestigung seiner Ende, bloße Beugung des Körpers in A, B und C, hiemit Gleichheit der Winkel $\alpha + \beta$ mit dem Winkel γ, folglich ungleiche Beugung des Körpers in A, B und C, also früheres Brechen in C als in A und B vorausgesetzt. Belidor und Succow behaupten aber, daß in diesen 3 Stellen gleichzeitiges Brechen Statt finde, welches nur bey der Ungleichheit der Elastizität oder bey gleicher Beugung des Körpers in A, B und C also bey Gleichheit der Winkel α, β und γ möglich ist. Die Versuche können daher mit den Resultaten der Theorie zwar sehr gut übereinstimmen, aber ohne deßhalb die Richtigkeit ihrer Voraussetzungen zu beweisen, indem Fehler, einander entgegengesetzt, gegeneinander größtentheils sich aufheben können. Aus diesem Grunde verlaße ich die offenbar falsche Voraussetzung, daß ein mit beyden Enden unbeweglich aufliegender Körper sich bloß in A, B und C beuge, übrigens gerade oder ungebeugt bleibe, und mit dieser Voraussetzung die damit zusammenhängenden Folgerungen in Beziehung der in den mehrmal genannten 3 Stellen statt habenden Beugungswinkel, nehme dafür eine gewisse die ganze Länge des

Körpers afficirende Beugung an, und suche das Verhältniß der Winkel α, β, γ aus der Natur dieser Beugung entsprechenden Kurve erst zu bestimmen.

I. Aufgabe.

Irgenwo in c C Fig. III. beugt (dieses Beugen mag mit einer blossen Dehnung oder mit einer Dehnung und Zusammenziehung der Fasern erfolgen) ein Gewicht Q das mit beyden Enden unbeweglich und horizontal aufliegende Prisma von durchgängig gleicher Elastizität nach einer krummen Linie abwärts. In welchem Verhältniß muß das Gewicht Q, welches in der Beschwerungsstelle den Beugungswinkel γ hervorbringt, größer seyn als ein anderes Q', welches in der Beschwerungsstelle des nämlichen, mit beiden Enden aber frey aufliegenden Prisma denselben Winkel γ erzeugt? Und von welcher Beschaffenheit wird die vom Gewicht Q bewirkte Kurve seyn?

Auflösung.

Die Beugung des c langen Prisma in c C ist, wie bereits erinnert wurde, mit den Beugungen in A a und B b in nothwendiger Verbindung.

Man nehme an, das Gewicht Q' bewirke den Beugungswinkel γ in c C, und die Gewichte q und q' bewirken die Beugungswinkel in a A und b B, so daß $Q = Q' + q + q'$: so wird Q' auf die beliebige, von a A um x horizontal entfernte Stelle m M des a lan-

gen Stückes A C einen lothrechten Druck $= \frac{(c-a)}{(c-x)} Q'$, und dieser auf a A und b B wieder einen lothrechten Druck ausüben. Derjenige in b B ist $= \frac{(c-a)\,x}{(c-x)\,c} Q'$. Die Stelle m M wird also mittels des Moments $\frac{(c-a)\,x\,(c-x)}{(c-x)\,c} Q' = (c-a)\frac{x}{c} Q'$ nach unten gekrümmt. Das Gewicht q, welches das Stück A C in a A beugt, wird es auch in m M beugen, m M also mittels des Moments $(a-x)\,q$ nach oben krümmen. Die Stelle mM wird mithin von Q′ durch das Moment $(c-a)\frac{x}{c} Q'$ nach unten und von q durch das Moment $(a-x)\,q$ nach oben gekrümmt. Da diese 2 Richtungen einander entgegen gesetzt sind, so wird m M wirklich nur durch die Differenz beyder Momente $M = (c-a)\frac{x}{c} Q' - (a-x)\,q$ nach einer Richtung gekrümmt. Indem hierbey die Richtung nach unten mit dem Zeichen + und die andere nach oben mit dem Zeichen — angedeutet ist: so zeigt eine positive Differenz eine Krümmung nach unten und eine negative eine Krümmung nach oben an. Wenn das Moment T in m M des Prisma den Beugungswinkel θ erzeugt: so muß, da $T : (c-a)\frac{x}{c} Q' - (a-x)\,q = \theta : \mu$, μ den Beugungswinkel in m M angeben. Nun bedeute λ Fig. III.* die Länge m′ m (nach der Leibnitz'schen Hypothese) oder ss (nach der Bernoulli'schen) einer weder gedehnten noch zusammengepreßten Faser, f die Höhe o″ m oder o′ s

des Prisma, welche mit m M oder s M den Beugungswinkel μ bildet, r den Krümmungshalbmesser für die Faser H H′, welche in der Mitte zwischen m′m und M′M ist: so ist r : f = λ + h H′ : μ', indem μ' die Länge des Bogens H H′ anzeigt, oder r : f = λ + h′ H′ : μ' (nach der Bernoullischen Hypothese.) Ist, wie hier und in der Folge angenommen wird, die Beugungstiefe c′ c′ des in C beschwerten Prisma Fig. III. in Vergleichung mit dessen Länge nicht zu bedeutend — eine Voraussetzung, welche bey Untersuchungen über die Stabilität architektonischer Werke, die im schlimmsten Fall nur eine geringe Beugung erleiden dürfen, hinreichend genügt — : so wird die Dehnung der Faser M′ M so wie etwa die Zusammenpressung der Faser m′ m ebenfalls nur unbedeutend, folglich nur ein kleiner aliquoter Theil der Faser λ, und h H′ so wie h′ H′ ein um so kleinerer aliquoter Theil von λ seyn, weßhalb anstatt des Verhältnißes λ + h H′ : μ' oder λ + h′ H′ : μ' das Verhältniß λ : μ' gesetzt werden kann. Es wird folglich r = $\frac{\lambda f}{\mu'}$. Nun verhalten sich $\theta : \mu$ wie $\theta' : \mu'$, indem θ' die Länge des dem Winkel θ entsprechenden Bogens bedeutet. Setzt man $\theta' : \mu'$ anstatt $\theta : \mu$ in obiger Gleichung: so wird T : $(c-a)\frac{x}{c}Q'-(a-x)q$ $= \theta' : \mu'$ und $\mu' = \frac{\theta'}{T}((c-a)\frac{x}{c}Q' - (a-x)\,q)$. Bringt man diesen Werth von μ' in die Gleichung

$r = \frac{\lambda f}{\mu'}$, so wird $r = \frac{\lambda f T}{\theta'} \cdot \frac{1}{(c-x)\frac{x}{c}Q' - (a-x)q}$

$= \frac{E^2}{(c-a)\frac{x}{c}Q' - (a-x)q}$, wenn E^2 für den beständigen Factor $\frac{\lambda f T}{\theta'}$ gesetzt wird. Aus der höhern Geometrie ist ferner bekannt, daß $r = \frac{-dx^3}{d^2y\,dx}$.

Da die Beugungstiefe des Prisma, welches mit beyden Enden befestigt unter dem Gewicht Q viel weniger als mit beyden Enden frey aufliegend sich senkt, der Annahme gemäß nicht zu bedeutend ist: so kann füglich $r = -\frac{dx^2}{d^2y}$ gesetzt werden. Verbindet man die beyden für r gefundenen Ausdrücke: so folgt, daß

$$\frac{E^2d^2y}{dx} = -(c-a)\frac{x}{c}dx\,Q' + (a-x)\,dx\,q.$$

Integrirt man: so wird, da dx beständig ist,

$$\frac{E^2dy}{dx} = -(c-a)\frac{x^2}{2c}Q' + (2ax - x^2)\frac{q}{2} + C.$$

Für x = a wird $\frac{dy}{dx} = \text{tg}\,\varphi$, indem φ den Winkel der Kurve in der Beschwerungsstelle mit der Horizontal-Linie bezeichnet, also

$$C = \frac{a^2}{2c}(c-a)Q' - \frac{a^2}{2}q + E^2\,\text{tg}\,\varphi, \text{ und}$$

$$\text{A)} \ldots \frac{E^2dy}{dx} = \frac{(c-a)}{2c}(a^2-x^2)\,Q' - (a^2-2ax+x^2)\frac{q}{2}$$
$$+ E^2\,\text{tg}\,\varphi.$$

Integrirt man noch einmal: so wird

$$B)\ldots E^2y = \frac{(c-a)}{6c}(3a^2x - x^3)Q' - (3a^2x - 3ax^2 + x^3)\frac{q}{6}$$

$+ xE^2 tg\,\varphi$, wozu keine beständige Größe kömmt, weil y mit x verschwindet.

Hierbey ist zu bemerken, daß y den vertikalen Abstand der durch die Mitte von aA und bB gehende Abscissenlinie HH′ von der Mitte der herabgebeugten Stelle mM bedeutet.

Wird $C'N' = x$ gesetzt, so wird die Krümmung in nN eben so, wie vorhin in mM bestimmt. Der Druck auf nN von Seite des Gewichts Q′ ist $= \frac{a}{(a+x)}Q'$ und derjenige auf $aA = \frac{a(c-a-x)}{(a+x)c}Q'$. Die Stelle nN wird also von Q′ mittels des Moments $\frac{a}{c}(c-a-x)Q'$ nach unten, und von q′ mittels des Moments xq' nach oben, also mittels der Differenz $M' = \frac{a}{c}(c-a-x)Q' - xq'$ nach einer Richtung gekrümmt. Der Krümmungshalbmesser r′ für die Stelle nN ist demnach $= \frac{E^2}{\frac{a}{c}(c-a-x)Q' - xq'}$ und zugleich $= -\frac{dx^2}{d^2y}$; woraus hervorgeht, daß

$$E^2\frac{d^2y}{dx} = -\frac{a}{c}(c-a-x)\,dx\,Q' + xdx\,q'.$$

Integrirt man: so wird

$$E^2\frac{dy}{dx} = -\frac{a}{2c}(2(c-a)x - x^2)Q' + \frac{x^2}{2}q' + C.$$

Da $\frac{dy}{dx} = tg\varphi$, wenn $x = o$, so ist

$C = E^2 \, tg\varphi$, also

$$a) \ldots E^2 \frac{dy}{dx} = -\frac{a}{2c}(2(c-a)x-x^2)Q' + \frac{x}{2}q' + E^2 \, tg\varphi.$$

Integrirt man noch einmal: so wird

$$E^2 y = -\frac{a}{6c}(3(c-a)x^2-x^3)Q' + \frac{x^3}{6}q' + xE^2 \, tg\varphi + C.$$

Nun ist $y = u = c'c'$, wenn $x = o$, also $C = E^2 u$ und

$$b) \ldots E^2 y = \frac{-a}{6c}(3(c-a)x^2-x^3)Q' + \frac{x^3}{6}q' + xE^2 \, tg\varphi + E^2 u;$$

wobey wieder die vorige Bemerkung zu machen ist, daß y den vertikalen Abstand der durch die Mitte von aA und bB gehenden Abscißenlinie H H' von der Mitte der herabgebeugten Stelle nN bedeutet.

Sind, wie hier vorausgesetzt wird, die Ende des Prisma unbeweglich in aA und bB: so werden die Winkel der Kurve in H sowie in A und a, und in H' sowie in B und b mit der Horizontal-Linie $= o$, also die Tangenten $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ in H und H' $= o$. Setzt man in der Gleichung (A) $x = o$ und in der andern (a) $x = c - a$: so wird $\frac{dy}{dx}$ in beyden Gleichungen $= o$. Es ist also

$$o = \frac{a^2}{2c}(c-a)Q' - \frac{a^2}{2}q + E^2 \, tg\varphi \text{ und}$$

$$o = \frac{-a}{2c}(c-a)^2 Q' + \frac{(c-a)^2}{2} q' + E^2 \operatorname{tg}\varphi,$$

woraus hervorgeht

$$C) \ldots E^2 \operatorname{tg}\varphi = \frac{-a^2}{2c}(c-a) Q' + \frac{a^2}{2} q \text{ und}$$

$$c) \ldots E^2 \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{2c}(c-a)^2 Q' - \frac{(c-a)^2}{2} q'.$$

Setzt man ferner in der Gleichung (B) $x = a$ so wird $y = u = c'c'$ also

$$D) \ldots E^2 u = \frac{2a^3}{6c}(c-a) Q' - \frac{a^3}{6} q + a E^2 \operatorname{tg}\varphi.$$

Für $x = c - a$ wird in der Gleichung (b) $y = o$ also

$$o = \frac{-2a}{6c}(c-a)^3 Q' + \frac{(c-a)^3}{6} q' + (c-a) E^2 \operatorname{tg}\varphi + E^2 u$$

und

$$d) \ldots E^2 u = \frac{2a}{6c}(c-a)^3 Q' - \frac{(c-a)^3}{6} q' - (c-a) E^2 \operatorname{tg}\varphi.$$

Mittels der vier Gleichungen (C), (c), (D) und (d) lassen sich nun die vier unbekannten Größen $\operatorname{tg}\varphi$, u, q und q' finden.

Es wird nämlich $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a(c-a)(c-2a)Q'}{4cE^2}$,

$$u = \frac{a^2(c-a)^2 Q'}{6cE^2},$$

$$q = \frac{(c-a) \cdot Q'}{2a},$$

$$q' = \frac{a}{2(c-a)} Q'.$$

Nun ist $Q' + q + q' = Q$; es ist also

$$F) \ldots Q = \frac{c^2 Q'}{2a(c-a)}$$

und $Q' = \frac{2a(c-a)}{c^2} Q$, demnach

$$tg\varphi = \frac{a^2(c-a)^2(c-2a)}{2c^3E^2} Q,$$

$$u = \frac{a^3(c-a)^3}{3c^3E^2} Q,$$

$$q = \frac{(c-a)^2}{c^2} Q,$$

$$q' = \frac{a^2}{c^2} Q.$$

Setzt man die ersten Werthe von den genannten 4 unbekannten Größen in die Gleichungen (B) und (b): so wird, indem ich in der letzten (b) statt y und x, zum Unterschied von y und x in der ersten (B), y' und x' annehme,

$$E) \ldots E^2 y = \frac{(c-a)}{12.\ ac}(3acx^2 - (c+2a)x^3)Q' \text{ und}$$

$$e) \ldots E^2 y' = \frac{a}{12c(c-a)}[2a(c-a)^3 + 3(c-a)^2(c-2a)x' - 6(c-a)^2 x'^2 + (3c-2a)x'^3]\,Q'.$$

Setzt man aber die zweyten Werthe von den nämlichen 4 unbekannten Größen in die Gleichungen (B) und (b): so wird

$$E') \ldots E^2 y = \frac{(c-a)^2}{6.\ c^3}(3acx^2 - (c+2a)x^3)\,Q \text{ und}$$

$$e' \ldots E^2 y' = \frac{a^2}{6c^3}(2a(c-a)^3 + 3(c-a)^2(c-2a)x' - 6(c-a)^2 x'^2 + (3c-2a)x'^3)\,Q.$$

Diese 2 Gleichungen (E′) und (e′) nebst der Gleichung (F) enthalten die Antwort auf die Fragen der Aufgabe, und diese ist hiemit gelöst.

Analys
der gefundenen Beugungs-Kurve.

Die Krümmungshalbmesser für die Kurvenstücke H o c′ und c′ o′ H′ wurden durch

$$r = \frac{E^2}{(c-a)\frac{x}{c}Q' - (a-x)q} \text{ und}$$

$$r' = \frac{E^2}{\frac{a}{c}(c-a-x')Q' - x'q'},$$

die Beugungsmomente für beyde Kurvenstücke aber durch

$$M = (c-a)\frac{x}{c}Q' - (a-x)\,q \text{ und}$$

$$M' = \frac{a}{c}(c-a-x')Q' - x'q' \text{ ausgedrückt.}$$

Setzt man in diesen 4 Gleichungen für q den gefundenen Werth $\frac{(c-a)}{2a}Q'$ und für q′ den Werth $\frac{a\,Q'}{2(c-a)}$: so wird

$$G) \ldots r = \frac{2ac\,E^2}{(c-a)[(2a+c)\,x - ac]\,Q'},$$

$$g) \ldots r' = \frac{2c\,(c-a)E^2}{a[2(c-a)^2 - (3c-2a)x']\,Q'},$$

$$H) \ldots M = \frac{(c-a)}{2ac}((2a+c)\,x - ac)Q' \text{ und}$$

$$h) \ldots M' = \frac{a}{2c(c-a)}(2(c-a^2 - (3c-2a)\,x')\,Q'.$$

Wird aber für Q′ sein gefundener Werth $\frac{2a(c-a)}{c^2}Q$ in den 4 Gleichungeu (G), (g), (H) und (h) gesetzt: so wird

$$G') \ldots r = \frac{c^5 E^2}{(c-a)^2[(2a+c)x-ac]\,Q'}$$

$$g') \ldots r' = \frac{c^5 E^2}{a^2[2(c-a)^2-(3c-2a)x']\,Q'}$$

$$H') \ldots M = \frac{(c-a)^2}{c^3}((2a+c)x-ac)\,Q \text{ und}$$

$$h') \ldots M' = \frac{a^2}{c^3}(2(c-a)^2-(3c-2a)x')\,Q.$$

Wird in den Gleichungen (G′) und (H′) $x = a$, und in den andern (g′) und (h′) $x' = o$: so wird

$$r = \frac{+c^5 E^2}{2a^2(c-a)^2 Q'}$$

$$r' = \frac{+c^5 E^2}{2a^2(c-a)^2 Q'}$$

$$M = \frac{+2a^2(c-a)^2}{c^3}Q \text{ und}$$

$$M' = \frac{+2a^2(c-a)^2}{c^3}Q,$$

also, wie erforderlich,

$$r = r' \text{ und}$$

$$M = M'.$$

Wird in den Gleichungen (G′) u. (H′) $x = \frac{ac}{2a+c}$ und in deu andern (g′) und (h′) $x' = \frac{2(c-a)^2}{(3c-2a)}$; so wird

$$r = \pm \infty$$

$$r' = \pm \infty$$

$$M = \pm o \text{ und}$$

$$M' = \pm o.$$

Wird in den Gleichungen (G′) und (H′) $x = o$ und in den andern (g′) und (h′) $x' = (c - a)$: so wird

$$r = \frac{-c^2 E}{a(c-a)^2 Q'}$$

$$r' = \frac{-c^2 E^2}{a^2 (c-a) Q'}$$

$$M = \frac{-a}{c^2}(c-a)^2 Q \text{ und}$$

$$M' = \frac{-a^2}{c^2}(c-a) Q.$$

Die Zeichen + und — der Krümmungshalbmesser r und r′ drücken die einander entgegengesetzten Richtungen der den Halbmessern r und r′ zugehörigen Krümmungen, das Zeichen + nämlich die Krümmung nach unten und das andere — die Krümmung nach oben aus, wie dieses in der Auflösung der Aufgabe angenommen wurde.

Ebenso drücken die Zeichen + und — der Krümmungsmomente M und M′ deren entgegengesetzte Wirkungen oder die Richtungen der von M und M′ entstehenden Krümmungen, der erwähnten Annahme gemäß, aus.

Aus diesen Erörterungen erhellet nun, 1) daß die Kurve H c′ H′ auf beyden Seiten des Beschwerungspunktes c′ einen Indifferenzpunkt habe, wo sie weder nach oben noch nach unten gekrümmt ist, 2) daß die Kurve dießseits dieser Indifferenzpunkte gegen den Beschwerungspunkt zu nach unten, jenseits dieser Punkte aber gegen die Stützpunkte H und H′ zu nach oben gekrümmt ist, 3) daß die Krümmungs-Halbmesser in H, c′ und H′ wie $\frac{2}{c-a}$, $\frac{c}{a(c-a)}$, $\frac{2}{a}$ und die

Stärke der Krümmungen in H, c′, H′, welche umgekehrt wie ihre Halbmesser sich verhalten, wie $\frac{c-a}{2}$, $\frac{a}{c}(c-a)$, $\frac{a}{2}$ nämlich wie die Krümmungsmomente für die Stellen H, c′, H′ d. i. wie $\frac{a}{c^2}(c-a)^2\,Q$, $\frac{2a^2}{c^3}(c-a^2\,Q$, $\frac{a^2}{c^2}(c-a)$ sich verhalten.

Um den kleinsten oder größten Krümmungshalbmesser und hierdurch die Stelle der stärksten oder schwächsten Krümmung zü finden, wird man sich der Differentiation der Ausdrücke $r = \frac{c^3 E^2}{(c-a)^2 [(2a+c)x-ac]\,Q}$ und $r' = \frac{c^3 E^2}{a^2[2(c-a)^2-(3c-2a)x']\,Q}$ vergeblich bedienen, weil, wenn $a < c-a$, der kleinste Halbmesser in den äußersten Punkt H der Kurve, und der größte in den nächsten Indifferenzpunkt o fällt, wo die Halbmesser dieß- und jenseits entgegengesetzte Zeichen haben. Der nämliche Fall tritt, wenn $a > c-a$, für den andern Indifferenzpunkt o′ ein. Fände, was nicht der Fall ist, innerhalb den Punkten H, o, c′, o′, H′ ein Maximum oder Minimum für r oder r′ Statt: so würde dieses durch Differenzial-Rechnung gefunden werden können.

Vergleicht man ohne Rücksicht der Zeichen die Halbmesser $r = \frac{-c^2 E^2}{a\,(c-a)^2\,Q}$ in H, $r = \frac{+c^3 E^2}{2a\,(c-a)^2 Q}$ in c′ $r' = \frac{-c^2 E^2}{a^2\,(c-a)\,Q}$ in H′ miteinander: so findet sich, daß

der kleinste Halbmesser, wenn $a < c - a$, in H, und, wenn $a > c - a$, in H′ trift, für $a = c - a$ aber die Halbmesser in H, c′ und H′ einander gleich sind.

Bricht das mit beyden Enden frey aufliegende Prisma, in der Entfernung a von H mit dem Gewicht P beschwert, mit dem Moment $N = \frac{a}{c}(c - a)\,P$ im Beschwerungspunkt: so muß das nämliche Prisma, mit beyden Enden unbeweglich aufgelegt, und in gleicher Entfernung a von H mit dem Gewicht Q beschwert, an irgend einer Stelle, der als Moment N gehört, auch brechen. Setzt man also, wenn $a < c - a$, das Moment $M = \frac{a}{c^2}(c - a)^2\,Q$, welches der stärksten Krümmung in H zugehört, gleich dem Brechungsmoment $N = \frac{a}{c}(c - a)\,P$: so findet man $Q = \frac{cP}{c-a}$, und wenn $a > c - a$, $Q = \frac{cP}{a}$. Für $a = c - a$ sind die Momente für H, c′ und H′ einander gleich, und $Q = \frac{cP}{c-a} = \frac{cP}{a}$. Ein mit beyden Enden unbeweglich aufliegendes Prisma bricht also im ersten Fall, daß $a < c - a$, in den, dem Beschwerungspunkte c′ nächsten Stützpunkt H allein zuerst, im zweyten Fall, daß $a > c - a$, in dem, dem Beschwerungspunkte c′ nächsten Stützpunkt H′ allein zuerst, im dritten Fall, daß $a = c - a$, in dem vom Beschwerungspunkt c′ gleichweit entfernten Stützpunkten H, H′ und im Beschwerungspunkt c′, also in diesen 3 Punkten zugleich,

weil in letzterm Falle, wie schon erinnert wurde, die Momente für diese 3 Punkte einander gleich sind.

Die Brechungslast Q ist also in den zwey ersten Fällen $= \frac{cP}{a'}$, wo a′ die Entfernung des Beschwerungspunktes c′ von seinem entferntern Stützpunkt bedeutet, im dritten Fall aber $= 2$ P. In den zwey ersten Fällen ist sohin $Q < 2$ P.

Der allgemein, insbesondere von Eitelwein in seinem Handbuch der Statik fester Körper behauptete Satz, daß ein mit beyden Enden unbeweglich aufliegendes Prisma, in irgend einem Punkt bis zum Brechen belastet, immer an den drey Punkten H, c′ und H′ zu gleicher Zeit breche, erhält hierdurch seine Berichtigung. Eitelwein nimmt mit den übrigen Schriftstellern den Satz, daß ein solches Prisma an den 3 Stellen zugleich breche, bloß hypothetisch an, gründet hierauf die Berechnung des Gewichts Q, und findet allgemein $Q = 2$ P. Die Richtigkeit dieses hypothetischen Satzes und des daraus hervorgehenden Resultats $Q = 2$ P beschränkt sich bloß auf den einzigen Fall, daß der Beschwerungspunkt in die Mitte des Prisma fällt. Im Verfolg werden noch einige Sätze dieses von mir hochgeschätzten Schriftstellers ihre Berichtigungen erhalten.

Ist $a < c - a$ und setzt man das Moment, welches in diesem Fall der stärksten Krümmung in H zugehört, gleich dem Brechungsmoment N, nämlich

$\frac{a}{c^2}(c-a)^2\, Q = N$: so ergibt sich durch Differenzjiren des Werths $Q = \frac{c^2 N}{a(c-a)^2}$, daß Q für $a = \frac{c}{3}$ ein Minimum $= \frac{27}{4c} N$ werde.

Ist aber $a > c-a$, und setzt man das Moment, welches in diesem Fall der stärksten Krümmung in H' zugehört, gleich dem Brechungsmoment N, nämlich $\frac{a^2}{c^2}(c-a)\, Q = N$: so findet sich durch Differenzjiren des Werthes $Q = \frac{c^2 N}{a^2(c-a)}$, daß Q für $a = \frac{2}{3}c$ ein Minimum $= \frac{27 N}{4c}$ werde, wie dieses schon aus dem ersten Fall folget.

Ein mit beyden Enden unbeweglich aufliegendes Prisma hat also zwey schwächste Punkte, welche gleichweit von H und H' um $\frac{c}{3}$ entfernt sind. Hieraus erhellet, daß das gewöhnliche Verfahren der Zimmerleute, die 2 Theilungspunkte eines in 3 gleiche Theile abgetheilten, mit beyden Enden frey aufliegenden Balkens durch Säulen oder Streben zu unterstützen, um so mehr bey Balken, deren Ende unbeweglich befestigt, und deren zwey schwächste Punkte entweder beständig oder momentan mit großen Lasten beschwert sind, seine statische Gültigkeit habe.

Da, wie vorhin schon erwiesen wurde, für $a <$ oder $> c-a$, $Q < 2P$ ist: so findet die größte Trag-

barkeit oder der stärkste Tragpunkt eines mit beyden Enden unbeweglich befestigten Prisma in dessen Mitte Statt. Das nämliche Resultat ergibt sich, wenn man das Moment, welches der Krümmung des Beschwerungs-Punkes c′ zugehört, gleich dem Brechungsmoment N, nämlich $\frac{2a^2}{c^3}(c-a)^2 Q = N$ setzt, und den Werth $Q = \frac{c^3 N}{2a^2(c-a)^2}$ differenzirt. Man erhält für $a = \frac{c}{2}$ das Maximum $Q = \frac{32 N}{4c}$.

Die mit beyden Enden unbeweglich befestigten, durch fremdes oder eigenes Gewicht gebeugten Prismen bilden demnach, in so fern sie eine, wiewohl nach unten gerichtete Kurve, in der Mitte ihren stärksten Tragpunkt und zwischen den Stützen (Widerlagern, welche dem Bestreben des Gewichts, sie einwärts zu bewegen, nach entgegengesetzter Richtung widerstehen müssen), und der Mitte zwey schwächste Tragpunkte, dann die bemerkte Beziehung zu den Stützen haben, eine eigene Klasse von Gewölben, deren Kurve und Wirkungsart im Bezug auf die Widerlager derjenigen anderer Gewölbe gerade entgegengesetzt ist; weßwegen ich jene verkehrte oder Kehr-Gewölbe nennen möchte.

Kehren wir von diesen statischen Betrachtungen wieder zu den geometrischen zurück: so bieten sich noch folgende Eigenschaften der Kurve dar.

Wird in der Gleichung (e′) $a < (c-a)$ angenommen: so entspricht der Abscisse $x' = \frac{(c-a)(c-2a)}{(3c-2a)}$

die größte, vom entferntern Indifferenzpunkte o′ um $\frac{c(c-a)}{(3c-2a)}$ horizontal entfernte Ordinate $y'^{*} = \frac{2a^2(c-a)^3 Q}{3(3c-2a)^2 E^2}$, wie aus der Differentiation jener Gleichung (e′) hervorgeht. Die Ordinate y′ gehört mithin dem Kurvenstück c′ o′ H′ an.

Für $a > (c-a)$ gehört die der Abscisse $x = \frac{2ac}{(c+2a)}$ entsprechende größte Ordinate $y^{*} = \frac{2a^3(c-a)^2 Q}{3(c+2a)^2 E^2}$ der Gleichung (E′) oder dem Kurvenstück H o c′ an.

Setzt man in den Gleichungen (E′) und (e′) $x = \frac{ac}{(2a+c)}$ und $x' = \frac{2(c-a)^2}{(3c-2a)}$: so findet man die den Indifferenzpunkten o und o′ zugehörigen Ordinaten

$$y^{**} = \frac{a^3(c-a)^2 Q}{3(2a+c)^2 E^2} \text{ und}$$

$$y'^{**} = \frac{a^2(c-a)^3 Q}{3(3c-2a)^2 E^2}.$$

Zieht man $x = \frac{ac}{(2a+c)}$ von a ab: so erhält man die horizontale Entfernung des Indifferenzpunktes o vom Beschwerungspunktes $c' = \frac{2a^2}{2a+c}$. Die horizontale Entfernung der 2 Indifferenzpunkte o und o′ findet sich daher $= \frac{2a^2}{2a+c} + \frac{2(c-a)^2}{(3c-2a)} = \frac{2c^3}{(3c-2a)(c+2a)}$

Für $x = a$ und $x' = o$ in den Gleichungen (E′) und (e′) wird

$$y = y' = u = \frac{a^3(c-a)^3 Q.}{3c^3 E^2}$$

Berechnet man mittels den nämlichen Gleichungen (E') und (e') $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dy'}{dx'}$ und setzt in deren Werthen $x = \frac{ac}{(2a+c)}$ und $x' = \frac{2(c-a)^2}{(3c-2a)}$: so findet man die Werthe für die Tangenten der Indifferenzpunkte

$$tg.o = \frac{a^2(c-a)^2 Q}{2c(2a+c) E^2} \text{ und}$$

$$tg.o' = \frac{-a^2(c-a)^2 Q}{2c(3c-2a) E^2}.$$

Die Tangenten in o und o' sind einander entgegengesetzt, weil zwischen den 2 Indifferenzpunkten im Punkte der größten Ordinate die Tangente = o ist, und Größen, die durch o oder ∞ gehen, in entgegengesetzte übergehen.

Anmerkung. Setzt man in den Werthen von y*, y**, tg.o c—a anstatt a, so gehen diese 3 Größen in y'*, y'**, tg.o' über, dem Ausdruck von tg.o ist aber noch das entgegengesetzte Zeichen zu geben, weil tg.o und tg.o' einander entgegengesetzt sind.

Anwendung der wichtigern allgemeinen Formeln auf spezielle Fälle.

I.

Wenn $a = \frac{2}{c}$ ist.

In diesem Fall ist $q = q' = \frac{Q'}{2} = \frac{Q}{4}$, $Q' = \frac{Q}{2}$, $Q = q + q' + Q' = 2\,Q'$.

Das Brechungsgewicht Q ist $= \frac{c}{(c-a)} P = 2\,P = 2\,Q'$.

Die Krümmungshalbmesser in H, c', H' werden der Ordnung nach $r = \frac{-8E^2}{cQ}$, $r'' = \frac{+8E^2}{cQ}$, $r' = \frac{-8E^2}{cQ}$, also an Größe einander gleich.

Bricht das Prisma unter der Last Q, so bricht es an den 3 Stellen H, c', H' zu gleicher Zeit.

Im Betreff des Verhältnißes der Tragbarkeit eines mit beyden Enden frey aufliegenden Prisma zu derjenigen eines mit beyden Enden unbeweglich befestigten beziehe ich mich auf Belidor's ersten und zweyten Versuch (S. 6 u. 7). Nach diesen zwey Versuchen betrugen die Brechungsgewichte P und Q 406 und 600 Pfund. Q ist demnach $= 1\frac{1}{2}$ P. Hierbey ist aber zu erinnern, daß die Ende der Latte des zweyten Versu-

ches nicht zerbrachen, sondern wegen dem Spielraum zwischen den Klammern und den Enden bloß krumm gebogen wurden. Wäre letzterer Umstand nicht eingetreten, und die Elastizität der Latten durchgängig gleichmäßiger gewesen, als sie wahrscheinlich wirklich war; so wäre Q näher $= 2P$ gewesen. Nach dem 5ten und 6ten Versuch zerbrachen die Latten mit den Gewichten $P = 187$ Pf. und $Q = 283$ Pf., und zwar in letzterm Versuch auch die beyden Ende der Latte. Q ist hier $= (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{62})\,P$. Wäre die Elastizität der zu diesen Versuchen gebrauchten Latten durchgängig gleichmäßiger gewesen, als sie wahrscheinlich wirklich war: so würde Q noch näher $= 2P$ gewesen seyn.

Im Allgemeinen bemerke ich, daß die Zuverlässigkeit der Formeln, welche auf den Voraussetzungen beruhen, daß die Elastizität des Körpers durchgängig gleich, die Befestigung oder Unbeweglichkeit der Ende vollkommen, die Beugung nur gering, und die Leibniz'sche oder Bernoulli'sche Hypothese vom Widerstande vollkommen naturgemäß sey, nur in dem Grade durch Versuche sich bewähren könne, als bey diesen jene Voraussetzungen wirklich Statt haben.

Berechnet man die Beugungsordinate $c'c' = u$: so findet man $u = \frac{c^3 Q}{192 E^2}$, welches zugleich die größte Ordinate ist.

Die Ordinaten der Indifferenzpunkte o und o' welche den Abscissen $x = \frac{c}{4}$ und $x' = \frac{c}{4}$ entsprechen, sind

$$y = \frac{c^3 Q}{384 E^2} \text{ und } y' = \frac{c^3 Q}{384 E^2}, \text{ also } y = y' = \frac{u}{2}.$$

Die Indifferenzpunkte treffen demnach in die Mitte der horizontalen Entfernung der Stützpunkte H, H' vom Beschwerungspunkt, und die Kurvenstücke H o, c' o, c' o', H' o' sind einander gleich, decken sich, c' auf H und H', o und o' auf o und o' gelegt, einander vollkommen.

Die Tangente des Winkels φ in c' mit dem Horizont ist = o.

II.

Wenn $a = \frac{c}{3}$ ist.

In diesem Fall ist $q = Q' = \frac{4}{9} Q$, $q' = \frac{Q'}{4} = \frac{Q}{9}$,

$Q' = \frac{4}{9} Q$ und $Q = q + q' + Q' = 2\frac{1}{4} Q'$.

Das Brechungsgewicht Q ist $= \frac{c}{(c-a)} P = 1\frac{1}{2} P$ *), wo P das Brechungsgewicht des mit beyden Enden frey aufliegenden, in der Entfernung $a = \frac{c}{3}$ vom Stützpunkt H beschwerten Prisma anzeigt.

---

*) Dieses $P = \frac{c N}{a(c-a)} = \frac{9 N}{2 c}$ ist $> P = \frac{c N}{a(c-a)} = \frac{8}{2c} N$, welches das mit beyden Enden freyaufliegende in der Mitte beschwerte Prisma zerbricht.

Die Krümmungshalbmesser in H, c', H' sind der Ordnung nach $r = \frac{-54 E^2}{8 c Q} = \frac{-6,75 E^2}{c Q}$, $r'' = \frac{+81 E^2}{8 c Q} = \frac{+10,125 E^2}{c Q}$, $r' = -\frac{108 E^2}{8 c Q} = -\frac{13,5 E^2}{c Q}$.

Bricht das Prisma, so zerbricht es in H zuerst.

Im ersten Fall, wenn $a = \frac{c}{2}$ ist, fand sich $r = r'' = r' = \mp \frac{8 E^2}{cQ}$. Ist Q dieses Falls gleich dem Q des zweyten Falls, wenn $a = \frac{c}{3}$ ist: so ist r für H' im zweyten Fall kleiner als r für H im ersten Fall, weil nämlich das Krümmungsmoment $M = \frac{-a}{c^2}(c-a)^2 Q = \frac{-cQ}{8}$ für H in diesem Fall kleiner als dasjenige $M' = \frac{-a}{c^2}(c-a)^2 Q = \frac{-cQ}{6,75}$ für H im zweyten Fall. Sollten aber die beyden Radien r, r für H in beyden Fällen einander gleich seyn: so müßte auch $M = M'$, also $Q = 0,843 \ldots Q$ seyn. Ist nun das Prisma in der Entfernung $a = \frac{c}{2}$ von H mit dem Gewicht Q, oder in der Entfernung $a = \frac{c}{3}$ von H mit dem kleinern Gewicht $Q = 0,843 \ldots Q$ belastet: so ist die Beugung und Gefahr des Brechens in H gleich groß. Diese Bemerkung ist dem erwiesenen Satze, daß der schwächste Tragpunkt für $a = \frac{c}{3}$ Statt habe, vollkommen gemäß.

Die Ordinate u im Beschwerungspunkt c′ ist $=\frac{8c^3 Q}{2187E^2}=\frac{c^3 Q}{273,375\ E^2}$. Die Senkung u ist also kleiner als diejenige $u=\frac{c^3 Q}{192E^2}$ im ersten Fall wenn $a=\frac{c}{2}$ ist.

Dir größte Ordinate $y'=\frac{16c^3 Q}{3969E^2}=\frac{c^3 Q}{248,0625E^2}$ findet für $x'=\frac{2c}{21}=\frac{1}{7}.\ \frac{2c}{3}=\frac{1}{7}$. c′ H′ Statt, und ist vom rechtseitigen Indifferenzpunkt o′ um $\frac{2}{7}$ c horizontal entfernt.

Auflösung
der ersten Aufgabe nach einer zweyten Methode.

Man denke sich das Kurvenstück zwischen den beyden Indifferenzpunkten außer Zusammenhang mit den beyden Seitenstücken H o und H′ o′ der Kurve, und zwar in c′ mit Q beschwert, indem in o und o′ Stützen oder dem Druck des Gewichts Q in c′ der Richtung nach entgegengesetzte Kräfte gedacht werden: so wird das Zwischenstück o c′ o′ gekrümmt im Gleichgewichte noch erhalten, wenn die Reactionen der Stützen oder jene Kräfte in o und o′ den Druckäußerungen $\frac{(c-a)^2\ (2a+c)}{c^3}$ Q und $\frac{a^2(3c-2a)Q}{c^3}$ gleich sind, welche das Gewicht Q in o und o′ hervorbringt. Denkt man sich ferner die Seitenstücke H o und H′ o′,

ohne Verbindung mit dem Zwischenstück, in o und o′ mit Gewichten beschwert, dergestalt, daß ihre Reactionen in o und o′ aufwärts so stark sind, als die Druckäußerungen des Gewichts Q in o und o′: so wird die Krümmung der Seitenstücke und des Zwischenstückes noch erhalten, wenn man sich die Seitenstücke mit dem Zwischenstück in o und o′ verbunden, die Gewichte der Seitenstücke in o und o′, so wie die Stützen oder Kräfte des Zwischenstückes in o u. o′ als nicht vorhanden oder gegeneinander aufgehoben denkt. Der Druck des Gewichts in c′ auf die Punkte o und o′ wird nämlich die Gewichte der Seitenstücke in o und o′, so wie die Reaction der Seitenstücke in o und o′ die Stützen oder Kräfte des Zwischenstückes in o und o′ surrogiren. Um sich von der Richtigkeit dieser Ansicht zu überzeugen, berechne man die Druckäußerungen, welche das Gewicht auf o und o′ als auf zwey feste Punkte hervorbringt; berechne die die Ordinaten O o und O′ o′ der in H und H′ horizontal befestigten, in o und o′ mit jenen Druckäußerungen gleichen Gewichten beschwerten Seitenstücke, ferner den vertikalen Abstand des Senkungspunktes c′ des in o und o′ frey aufliegenden in c′ mit Q beschwerten Zwischenstücks von der Horizontallinie H H′, endlich die 2 Tangenten der Winkel, welche die Kurve des einen Seitenstücks Ho in o und die des Zwischenstücks in o mit dem Horizont machen, eben so die 2 Tangenten der Winkel, welche für das andere Seitenstück H′ o′ und das Zwischenstück in o′ gehören; so wird man

die nämlichen für die Indifferenzpunkte bereits angegebenen Ordinaten O o, O′ o′, den nämlichen vertikalen Abstand, der bisher mit u bezeichnet wurde, und die Gleichheit der zwey Tangenten in o, eben so der zwey andern in o′ finden.

Dieser zweyten Auflösungsmethode werde ich mich bey Lösung der Aufgabe V. bedienen.

Am Rande dieser zweyten und der ersten Auflösung der Aufgabe I. bemerke ich, daß die nämlichen Resultate gelten, die Ende H, H′ des Prisma mögen in H, H′ horizontal unbeweglich befestigt, oder (Fig. III**.) mittels Gegengewichten p, p′ an den Hebelsarmen l, l′, indem lp = aq und l′p′ = (c—a) q′ ist, horizontal unbeweglich erhalten werden.

Anmerkung.

über den Indifferenzpunkt der elastischen Prismen nach ihrer Höhe oder Stärke.

Die meisten Schriftsteller sind für die Bernoullische Hypothese, daß beym Beugen eines Körpers einige Fasern gedehnt, andere zusammengepreßt werden. Die Stelle, wo die Fasern weder gedehnt noch zusammengepreßt werden, oder den Indifferenzpunkt beyder verschiedenen Affectionen allgemein zu bestimmen, war man bisher nicht im Stande. Ich will bey der Voraussetzung, daß der Indifferenzpunkt bey verschiedenen Beugungen eines und desselben Körpers nicht veränderlich ist, überzeugend wenigstens eine Stelle angeben, wohin derselbe nicht fallen kann.

Diese Stelle kann nie in die Mitte der Höhe des Querdurchschnitts fallen, weil sonst die krumme, mittlere Linie H c′ H′, welche die Indifferenzlinie oder die Linie der weder gedehnten noch zusammengepreßten Fasern vorstellte, auch der geraden Linie H H′ gleich seyn mußte. Fällt aber die Indifferenzlinie für das nach unten gekrümmte Zwischenstück oberhalb der Centrallinie o c′ o, so fallen die Indifferenzlinien für die nach oben gekrümmten Seitenstücke unterhalb den Centrallinien H o, H′ o′; dadurch, und daß die Ausdehnung des Körpers in jeder Längenschicht, von der Zusammenpressung desselben nur zum Theil compensirt, einen positiven Ueberschuß gewährt, wird begreiflich, wie ein gerades, mit beyden Enden unbeweglich befestigtes Prisma gebeugt eine krumme, längere Figur anzunehmen fähig ist.

II. Aufgabe.

Wenn das Prisma Fig. IV. in H allein unbeweglich, in H′ aber frey aufliegt: so fragt sich, welches Verhältniß wird das Gewicht Q zu Q′ haben, und von welcher Beschaffenheit wird die von Q bewirkte Kurve seyn?

Auflösung.

Für das linkseitige Kurvenstück ist

$$\text{A}) \ldots \frac{E^2\,dy}{dx} = \frac{(c-a)}{2c}(a^2-x^2)Q' - (a^2-2ax+x^2)\frac{q}{2} + E^2\,tg\varphi.$$

B) . . $E^2 y = \frac{(c-a)}{6c}(3a^2x - x^3)Q' - (3a^2x - 3ax^2 + x^3)\frac{q}{6}$
$+ x E^2 \operatorname{tg}\varphi.$

Für das rechtseitige Kurvenstück aber ist, weil $q' = o$,

a) . . $\frac{E^2 dy'}{dx'} = \frac{-a}{2c}[2(c-a)x' - x'^2]Q' + E^2 \operatorname{tg}\varphi$

b) . . $E^2 y' = \frac{-a}{6c}[3(c-a)x'^2 - x'^3]Q' + x'E^2 \operatorname{tg}\varphi$
$+ E^2 u.$

Setzt man in (A) und (a) $x = o$ und $x' = (c-a)$: so wird die Tangente in H oder $\frac{dy}{dx} = o$, die Tangente des Winkels β in H' aber oder $\frac{dy'}{dx'} = \operatorname{tg}\beta$, mithin

C) . . $E^2 \operatorname{tg}\varphi = -\frac{a^2}{2c}(c-a)Q' + \frac{a^2 q}{2}$ und

c) . . $E^2 \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{2c}(c-a)^2 Q' + E^2 \operatorname{tg}\beta.$

Setzt man ferner in (B) und (b) $x = a$ und $x = (c-a)$: so wird $y = u$ und $y = o$ also

D) . . $E^2 u = \frac{2a^3}{6c}(c-a)Q' - \frac{a^3}{6}q + aE^2 \operatorname{tg}\varphi.$

d) . . $E^2 u = \frac{2a}{6c}(c-a)^3 Q' - (c-a)E^2 \operatorname{tg}\varphi.$

Mittels der Gleichungen (C), (c), (D) und (d) lassen sich nun die unbekannten Größen $\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\beta$, u und q finden.

Es wird

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a(c-a)[a^2 + 2c(c-2a)]Q'}{2c(3c-a)E^2}$$

$$\text{tg}\beta = \frac{-ac(c-a)Q'}{2(3c-a)E^2}$$

$$u = \frac{a^2(c-a)^2(4c-a)Q'}{6c(3c-a)E^2}$$

$$q = \frac{(c-a)(2c-a)Q'}{a(3c-a)}$$

Da $Q = q + Q'$: so wird, für q den gefundenen Werth gesetzt,

$$Q = \frac{2c^2 Q'}{a(3c-a)}, \text{ und}$$

$$Q' = \frac{a(3c-a)Q}{2c^2}$$

$$\text{tg}\varphi = \frac{a^2(c-a)[a^2+2c(c-2a)]Q}{4c^5 E^2}$$

$$\text{tg}\beta = \frac{-a^2(c-a)Q}{4cE^2}$$

$$u = \frac{a^3(c-a)^2(4c-a)Q}{12c^5 E^2}$$

$$q = \frac{(c-a)(2c-a)Q}{2c^2}.$$

Setzt man diese Werthe für q, u und tgφ in den Gleichungen (B) und (b): so ist y und y′ durch x und x′ und lauter bekannte Größen bestimmt.

Analys der gefundenen Kurve.

Vergleicht man die Krümmungsmomente für H und c′, (in H′ findet begreiflich kein Bruch Statt) nämlich $\frac{a(c-a)(2c-a)Q}{2c^2}$ und $\frac{a^2(c-a)(3c-a)Q}{2c^5}$: so wird für $a < \frac{c}{2}$ das Moment für H > das Moment für c′.

Die Gleichheit beyder Momente findet für $a = (2-\sqrt{2})\, c = 0{,}59..\, c$ Statt.

Für $a > 0{,}59..c$ ist das Moment für $c' >$ das Moment für H. Nun entspricht dem größern Moment eines Punktes frühere Brechbarkeit, und zwey gleich großen Momenten gleichzeitige Brechbarkeiten; setzt man daher für $a < \frac{c}{2}$ oder $= 0{,}59..c$ das Moment $\frac{a\,(c-a)\,(2c-a)\,Q}{2c^2}$ gleich dem Brechungs-Moment $N = \frac{a\,(c-a)\,P}{c}$: so wird

$$\text{I)} \,..\; Q = \frac{2c\,P}{(2\,c-a)}.$$

Für $a > 0{,}59..c$ wird, $\frac{a^2\,(c-a)\,(3c-a)}{2\,c^3}\,Q = N = \frac{a(c-a)\,P}{c}$ gesetzt,

$$\text{II)} \,..\; Q = \frac{2\,c^2\,P}{a\,(3c-a)}.$$

Wenden wir diese Formeln (I) und (II) auf einige Beyspiele an: so erhält man folgende Resultate.

Für $a = \frac{c}{3}$ ist $Q = 1\frac{1}{5}\,P$. Ein mit dem der Belastung Q nächsten Ende unbeweglich aufliegendes Prisma ist also um ein Fünftel mehr zu tragen im Stande, ehe es in H bricht, als mit beyden Enden freyaufgelegt. Eitelwein findet eine $\frac{2}{5}$ größere Tragbarkeit; und nach ihm bräche das Prisma in H und c' zu gleicher Zeit.

Für $a = (2-\sqrt{2})\,c = 0\,59..c$ ist nahe $Q = 1\frac{3}{7}\,P$. Das Prisma wird eine $\frac{3}{7}$ mal größere Last zu tra-

gen im Stande seyn, ehe es in H und c′ bricht, als mit beyden Enden frey aufgelegt. Nach Eitelwein's Bestimmung bräche das Prisma unter einer $\frac{2}{5}$ mal größern Last in H und c′ als mit beyden Enden frey aufliegend.

Für $a = \frac{c}{2}$ ist $Q = 1\frac{3}{5}$ P. Das Prisma in c′ zuerst brechend hat eine $\frac{3}{5}$ mal größere Tragbarkeit vor dem mit beyden Enden frey aufliegenden. Eitelwein berechnet eine $\frac{1}{2}$ mal größere Tragbarkeit.

Für $a = \frac{2c}{3}$ ist $Q = 1\frac{2}{7}$ P. Das Prisma bricht unter dieser Last in c′ zuerst. Eitelwein findet $Q = 1\frac{1}{3}$ P.

Eitelwein's Bestimmungen beruhen auf dem hypothetischen Satz, daß das Zerbrechen immer in H und c′ zugleich Statt finde.

Setzt man das Moment für H gleich dem Brechungsmoment N nämlich $\frac{a\,(c-a)\,(2c-a)\,Q}{2\,c^2} = N$ und eben so das Moment für c′ gleich N nämlich $\frac{a^2\,(c-a)\,(3c-a)\,Q}{2c^3} = N$, so findet man aus der ersten Gleichung III) .. $Q = \frac{2c^2\,N}{a\,(c-a)\,(2c-a)}$, und aus der zweyten IV) . . $Q = \frac{2c^3\,N}{a^2\,(c-a)\,(3c-a)}$.

Differenzirt man (III) und (IV): so wird, für $a = (1 - \sqrt{\tfrac{1}{3}})\,c = 0,43..c$, III) .. $Q = \frac{5,2\,..\,M}{c}$ ein Minimum, um H zu zerbrechen; und, für $a = (\tfrac{3}{2} - \sqrt{\tfrac{3}{4}})\,c = 0,64\,..\,c$, IV) .. $Q = \frac{5,74\,..\,M}{c}$ ein Minimum, um c′ zu zerbrechen.

Der allerschwächste Tragpunkt fällt also in a = 0,43 . . c. Eine Last in diesem Punkt gefährdet das Brechen des Prisma und zwar im Punkte H am allermeisten.

Vergleicht man $u_{,} = \frac{a^3(c-a)^2(4c-a)Q_{,}}{12c^3 E^2}$ mit der Senkung der ersten Aufgabe nämlich $u_{,,} = \frac{a^3(c-a)^3 Q_{,,}}{3c^3E^2}$: so ist, bey der Gleichheit der Gewichte $Q_{,}$ u. $Q_{,,}$, $u_{,} > u_{,,}$, weil $ac - \frac{a^2}{4} > ac - a^2$.

Die Senkung eines mit einem Ende allein unbeweglich aufliegenden Prisma ist also unter übrigens gleichen Umständen größer als die eines mit beyden Enden unbeweglichen.

Für $u_{,} = u_{,,}$ ist $Q_{,,}$ der ersten Aufgabe $= \frac{(c-\frac{a}{4})}{c-a} Q_{,}$, also $Q_{,,} > Q_{,}$. Es ist also ein größeres Gewicht erforderlich, um das mit beyden Enden unbewegliche Prisma eben so tief zu senken, als das mit einem Ende freyaufliegende.

Für $a = \frac{c}{2}$ und bey Ungleichheit der Senkungen $u_{,}, u_{,,}$ verhalten sich die Gewichte $Q_{,}$ und $Q_{,,}$, welche das mit einem Ende frey und das mit beyden Enden unbeweglich aufliegende Prisma zerbrechen, der Ordnung nach wie $1\frac{3}{5} : 2$.

III. Aufgabe.

Wenn die Ende des Prisma um gewisse Grade über die Horizontallinie sich zu erheben im Stande sind (Fig. V.): so entsteht die Frage, in welchem Verhältniß wird Q zu Q′, und von welcher Beschaffenheit die vom Gewicht Q bewirkte Kurve seyn?

Auflösung.

Die Winkel, welche die Kurve in H und H′ mit der Horizontallinie bildet, seyen α und β: so ist für die linkseitige Kurve H o c′.

$$\frac{E^2 d^2 y}{dx} = -\left(\frac{(c-a)\,x\,Q'}{c} - (a-x)q\right) dx$$

$$A) \ldots \frac{E^2 dy}{dx} = \frac{(c-a)}{2c}(a^2 - x^2)Q' - (a^2 - 2ax + x^2)\frac{q}{2} + E^2 \operatorname{tg}\varphi.$$

$$B) \ldots E^2 y = \frac{(c-a)}{6c}(3a^2x - x^3)\,Q' - (3a^2x - 3ax^2 + x^3)\frac{q}{6} + x\,E^2 \operatorname{tg}\varphi.$$

Für die rechtseitige Kurve c′ o′ H′ aber ist

$$\frac{E^2 d^2 y'}{dx'} = -\left(\frac{a}{c}(c-a-x')\,Q' - x'q'\right) dx'$$

$$(a) \ldots \frac{E^2 dy'}{dx'} = \frac{-a}{2c}[2(c-a)x' - x'^2]Q' + \frac{x'^2 q'}{2} + E^2 \operatorname{tg}\varphi.$$

$$(b) \ldots E^2 y' = \frac{-a}{6c}[3(c-a)x'^2 - x'^3]Q' + \frac{x'^3 q}{6} + x'E^2 \operatorname{tg}\varphi + E^2 u.$$

Wird in (A) und (a) $x = o$ und $x = c - a$ gesetzt: so wird $\frac{dy}{dx} = tg\alpha$ und $\frac{dy'}{dx'} = tg\beta$, also

$$E^2 tg\alpha = \frac{a^2}{2}(c-a)Q' - \frac{a^2}{2}q + E^2 tg\varphi \text{ und}$$

$$C) \ldots E^2 tg\varphi = -\frac{a^2}{2c}(c-a)Q' + \frac{a^2}{2}q + E^2 tg\alpha;$$

ferner

$$E^2 tg\beta = -\frac{a}{2c}(c-a)^2 Q' + \frac{(c-a)^2}{2}q' + E^2 tg\varphi$$

und

$$c) \ldots E^2 tg\varphi = \frac{a}{2c}(c-a)^2 Q' - \frac{(c-a)^2}{2}q' + E^2 tg\beta.$$

Setzt man in (B) und (b) $x = a$ und $x' = c - a$; so wird $y = u$ und $y' = o$ also

$$D) \ldots E^2 u = \frac{2a^3}{6c}(c-a)Q' - \frac{a^3}{6}q + a E^2 tg\varphi \text{ und}$$

$$d) \ldots E^2 u = \frac{2a}{6c}(c-a)^3 Q' - \frac{(c-a)^3}{6}q' - (c-a)E^2 tg\varphi.$$

Mittels der 4 Gleichungen (C), (c), (D) und (d) finden sich die unbekannten Größen $tg\varphi$, u, q und q' in folgenden Ausdrücken:

$$E) \ldots tg\varphi = \frac{a(c-a)(c-2a)Q' - 2E^2(a tg\alpha + (c-a)tg\beta}{4c E^2}$$

$$e) \ldots u = \frac{a^2(c-a)^2 Q' + 2a(c-a)E^2(tg\alpha - tg\beta)}{6c E^2}$$

$$F) \ldots q = \frac{ac(c-a)Q' - 2E^2[(2c+a)tg\alpha + (c-a)tg\beta]}{2a^2 c}$$

$$f) \ldots q' = \frac{ac(c-a)Q' + 2E^2[a tg\alpha + (3c-a)tg\beta].}{2c(c-a)^2}$$

Nun ist $Q = Q' + q + q'$, also ist

$$Q = \frac{ac^2(c-a)Q' - 2cE^2\,[(2c-3a)tg\alpha + (c-3a)\,tg\beta]}{2a^2\,(c-a)^2}$$

und

$$G) \;..\; Q' = \frac{2a^2(c-a)^2 Q + 2cE^2\,[(2c-3a)\,tg\alpha + (c-3a)tg\beta]}{ac^2\,(c-a)}$$

Bringt man in die 4 ersten Gleichungen (E), (e), (F) und (f) den für Q' gefundenen Werth: so erhält man $tg\varphi$, u, q und q' durch Q und andere gegebene Größen ausgedrückt. Werden diese letztern Werthe, in die Gleichungen (B) und (b) gesetzt: so ist die Natur der Kurve bestimmt, und die Aufgabe hiedurch und durch $Q = Q' + q + q'$ aufgelößt.

Andere Auflösung.

Setzte man $Hm' = x$, und $H'n' = x$ anstatt $c'n' = x$: so würde die Auflösung auf folgende Weise sich ergeben:

$$\frac{E^2 d^2 y}{dx} = -(c-a)\frac{x}{c}\,dx\,Q' + (a-x)\,dx\,q.$$

Integrirt man: so wird

$$\frac{E^2 dy}{dx} = -(c-a)\frac{x^2}{2c}Q' + (2ax - x^2)\,\frac{q}{2} + C.$$

Für $x = o$ ist $\frac{dy}{dx} = tg\alpha$, also

$$A) \;..\; \frac{E^2 dy}{dx} = -(c-a)\frac{x^2}{2c}Q' + (2ax - x^2)\frac{q}{2} + E^2 tg\alpha$$

Integrirt man noch einmal: so wird

$$B) \;..\; E^2 y = -(c-a)\frac{x^3}{6c}Q' + (3ax^2 - x^3)\frac{q}{6} + xE^2 tg\alpha,$$

wozu keine beständige Größe kömmt, weil y mit x verschwindet.

Auf eine ähnliche Art erhält man

$$\frac{E^2 d^2 y}{dx} = -ax\,dx\,Q' + (c-a-x)\,dx\,q';$$

$$(a)\ldots \frac{E^2 dy}{dx} = -\frac{ax^2}{2c}Q' + (2(c-a)x-x^2)\frac{q'}{2} + E^2 tg\beta;$$

$$(b)\ldots E^2 y = -\frac{ax^3}{6c}Q' + (3(c-a)x^2-x^3)\frac{q'}{6} + xE^2 tg\beta.$$

Wird in den Gleichungen (A) und (a) $x = a$ und $x = c-a$, so wird $\frac{dy}{dx} = tg\varphi$, folglich

$$C)\ldots E^2 tg\varphi = -\frac{a^2}{2c}(c-a)Q' + \frac{a^2}{q}q + E^2 tg\alpha \text{ und}$$

$$c)\ldots E^2 tg\varphi = -\frac{a}{2c}(c-a)^2 Q' + \frac{(c-a)^2}{2}q' + E^2 tg\beta.$$

Wird ferner in den Gleichungen (B) und (b) $x = a$ und $x = c-a$: so wird $y = u$, also

$$D)\ldots E^2 u = -\frac{a^3}{6c}(c-a)Q' + \frac{2a^3}{6}q + a\,E^2 tg\alpha \text{ und}$$

$$d)\ldots E^2 u = -\frac{a}{6c}(c-a)^3 Q' + \frac{2(c-a)^3}{6}q' + (c-a)E^2 tg\beta.$$

Nun geht, wenn $a < c-a$, $\frac{dy}{dx}$ der Gleichung (a) von $tg\beta$ durch o in $tg\varphi$ über, und $tg\varphi$ ist der $tg\beta$ entgegengesetzt; oder wenn $a > c-a$, $\frac{dy}{dx}$ der Gleichung (A) von $tg\alpha$ durch o in $tg\varphi$ über, und $tg\varphi$ ist der $tg\alpha$ entgegengesetzt.

Es ist also in jedem Fall tgφ der Gleichung (c) der tgφ der Gleichung (C) entgegengesetzt.

Gibt man nun einen der beyden Werthe von tgφ das Zeichen —, und setzt dann beyde Werthe einander gleich: so wird

$$-\frac{a^2}{2c}(c-a)Q' + \frac{a^2}{2} + E^2 tg\alpha = \frac{a}{2c}(c-a)^2 Q' - \frac{(c-a)^2}{2} q'$$
$$- E^2 tg\beta;$$

woraus hervorgeht

$$q' = \frac{a(c-a)Q' - a^2 q - 2E^2(tg\alpha + tg\beta)}{(c-a)^2}$$

Aus den Gleichungen (D) und (d) ergibt sich ferner

$$q' = \frac{a(c-a)(c-2a)Q' + 2a^3 q + 6E^2(a tg\alpha - (c-a)tg\beta}{2(c-a)^3}$$

Stellt man die beyden Werthe von q' zusammen: so erhält man

$$q = \frac{ac(c-a)Q' - 2E^2[(2c+a)tg\alpha - (c-a)tg\beta]}{2a^2 c};$$

es ist daher auch

$$q' = \frac{ac(c-a)Q' + 2E^2[a tg\alpha - (3c-a)tg\beta]}{2c(c-a)^2}$$

und, da $Q = Q' + q + q'$,

$$Q' = \frac{2a^2(c-a)^2 Q + 2cE^2[(2c-3a)tg\alpha - (c-3a)tg\beta]}{ac^2(c-a)}.$$

in welchen drey Gleichungen tgα und tgβ positiv sind.

Vergleicht man die in der ersten Auflösung gefundenen Werthe für q, q' und Q', worin aber tgβ ne-

gativ ist, mit diesen letztgefundenen: so wird man unter ihnen eine vollkommene Uebereinstimmung finden.

Setzt man endlich diese Werthe von q, q' und Q' in die Gleichungen (B) und (b): so ist die Natur der Kurve bestimmt, und die Aufgabe hiedurch und durch $Q = Q' + q + q'$ aufgelößt.

Anmerkung.

Nach Belidors erstem und zweytem Versuch trug die Latte, deren Ende frey auflagen, in der Mitte 406 Pf., mit beyden Enden aber unvollkommen befestigt, 600 Pf., ehe sie brach. Die beyden Ende waren im letzten Fall bloß krumm gebogen, nicht zerbrochen. Nimmt man den hypothetischen Satz an, daß $a = \beta$: so wird mittels der Gleichung $406 = Q' = \frac{16}{c^2} E^2 tg\alpha'$, (eine Gleichung, die aus der weiter unten angegebenen allgemeinen für das mit beyden Enden frey aufliegende Prisma sich ergibt, und in welcher α' den Winkel des Endes H mit der Horizontal-Linie bedeutet), welche, für $c = 18'' = 1\frac{1}{2}'$, $E^2 tg\alpha' = 57,09..$ wird, und mittels der Gleichung $600 = Q = 2Q' - \frac{16 E^2 tg\alpha}{c^2}$, (welcher Ausdruck aus der oben aufgestellten allgemeinen Gleichung für $a = \frac{c}{2}$ und $tg\alpha = - tg\beta$ hervorgeht), welche, für $c = 18'' = 1\frac{1}{2}'$, $E^2 tg\alpha = 29,81..$ wird, das Verhältniß $tg\alpha' : tg\alpha = 1,915 : 1 = 2 : 1$ ungefähr gefunden, woraus das

Verhältniß der Winkel α' und α, welche die Ende der Latten in beyden Versuchen mit der Horizontal-Linie bildeten, sich beurtheilen läßt.

Die Auflösung der dritten Aufgabe umfaßt außer derjenigen der speziellen Fälle, wenn beyde Ende oder nur eines davon unvollkommen beweglich, das andere aber ganz frey oder ganz unbeweglich aufliegt, auch diejenige der ersten und zweyten Aufgabe, ja sogar der beyden Fälle, wenn die beyden Ende des Prisma ganz frey aufliegen, und wenn das Prisma bloß mit einem Ende in H unter einem nicht zu großem Winkel mit der Horizontal-Linie befestigt, an dem andern Ende aber in H' mit einem Gewicht Q beschwert ist.

Setzt man nämlich in der ersten Auflösung $tg\alpha = o$ und $tg\beta = o$: so wird aus aus (E), (e), (F), (f) und (G)

$$tg\varphi = \frac{a\,(c-a)\,(c-2a)\,Q'}{4c\,E^2},$$

$$u = \frac{a^2\,(c-a)^2\,Q'}{6c\,E^2},$$

$$q = \frac{(c-a)\,Q'}{2a},$$

$$q' = \frac{a\quad Q'}{2(c-a)},$$

$$Q' = \frac{2a\,(c-a)\,Q}{c^2},$$

wie für die erste Aufgabe gefunden wurde.

Diese Werthe, in (B) und (b) gesetzt, machen diese 2 Gleichungen gleich denen (E) und (e) der ersten Aufgabe.

Setzt man aber $tg\alpha = o$ und $q' = o$: so werden die Gleichungen (B) und (b) gleich denen (B) und (b) der zweyten Aufgabe, und die Gleichungen (E), (e), (F) und (f) werden

$$tg\varphi = \frac{a(c-a)(c-2a)Q' - 2(c-a)E^2 tg\beta}{4c E^2},$$

$$u = \frac{a^2(c-a)^2 Q' - 2a(c-a)E^2 tg\beta}{6c E^2},$$

$$q = \frac{ac(c-a)Q' - 2(c-a)E^2 tg\beta}{2a^2 c} \text{ und}$$

$$o = ac(c-a)Q' + 2(3c-a)E^2 tg\beta \text{ also}$$

$$tg\beta = \frac{-ac(c-a)Q'}{2(3c-a)E^2}.$$

Dieser Werth von $tg\beta$, in die vorhergehenden Gleichungen und in (G) gesetzt, gibt

$$tg\varphi = \frac{a(c-a)[a^2 + 2c(c-2a)]Q'}{2c(3c-a)E^2},$$

$$u = \frac{a^2(c-a)^2(4c-a)Q'}{6c(3c-a)E^2},$$

$$q = \frac{(c-a)(2c-a)}{a(3c-a)} Q' \text{ und}$$

$$Q' = \frac{a(3c-a)Q}{2c^2}.$$

Die nämlichen Gleichungen, welche für die zweyte Aufgabe angegeben wurden.

Setzt man $q = o$ und $q' = o$, also $Q' = Q$: so wird aus den Gleichungen (B) und (b)

$$E^2 y = \frac{(c-a)}{6c}(3a^2x - x^3)Q' + xE^2 tg\varphi,$$

$$E^2 y' = \frac{-a}{6a}[3(c-a)x' - x'^3]Q' + x'E^2 tg\varphi + E^2 u;$$

und aus den Gleichungen (F). und (f) wird

$$o = ac(c-a)Q' - 2E^2[(2c+a)tg\alpha + (c-a)tg\beta]$$

und

$$o = ac(c-a)Q' + 2E^2(atg\alpha + (3c-a)tg\beta).$$

woraus $tg\beta = -\frac{(c+a)tg\alpha}{(2c-a)}$, $tg\beta = -\frac{a(c^2-a^2)Q}{6cE^2}$

und $tga = \frac{a(c-a)(2c-a)Q'}{6cE^2}$ hervorgeht.

Bringt man diese Werthe von $tg\alpha$ und $tg\beta$ in (E) und (e): so erhält man

$$tg\phi = \frac{a(c-a)(c-2a)Q'}{3cE^2}. \text{ und}$$

$$u = \frac{a^2(c-a)^2Q'}{3cE^2}.$$

Die nämlichen Gleichungen, welche Eitelwein auf andere Weise für die mit beyden Enden ganz frey aufliegenden Prismen gefunden.

Findet in H′ kein Stützpunkt für das in H befestigte Prisma Statt: so verschwindet die Reaction $\frac{(c-a)x}{(c-x)c}Q'$ und das Reactions-Moment $(c-a)\frac{x}{c}Q'$ (S. 11.) des Stützpunktes H′ für alle Punkte des Prisma; dieses mag mit einem Gewicht wo immer belastet seyn. In diesem Fall ist begreiflich $Q' = o$ zu setzen; hierdurch verschwindet die Einwirkung des Stützpunktes H′ auf das irgendwo belastete Prisma.

Setzt man also in der allgemeinen Gleichung (B) und (C) $Q' = o$: so wird

$$E^2 y = -(3a^2x - 3ax^2 + x^3)\frac{q}{6} + xE^2 tg\phi,$$

$$E^2 \operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2}{2} q + E^2 \operatorname{tg}\alpha,$$ also

$$E^2 y = (3ax^2 - x^3)\frac{q}{6} + x E^2 \operatorname{tg}\alpha.$$

Da für den Punkt m' (Fig. VI.) Hm und mm' die Coordinaten x und y sind: so wird für $x = a$ $y = \frac{2a^3 q}{6E^2} + a \operatorname{tg}\alpha = C'c'$.

Soll nun der Punkt m' durch $c'M = x'$ und $Mm' = y'$ bestimmt werden: so setze man in obiger Gleichung $x = a - x'$ und $y = C'c' - y' = \frac{2a^3 q}{6E^2} + a \operatorname{tg}\alpha - y'$, woraus

$$E^2 y' = (3a^2 x' - x'^3)\frac{q}{6} + x' E^2 \operatorname{tg}\alpha$$ hervorgeht.

Für $\alpha = 0$ im Befestigungspunkte H wird

$$E^2 y' = (3a^2 x' - x'^3)\frac{q}{6},$$ der Form nach die nämliche Gleichung, welche Eitelwein in diesem Fall Bd. III. §. 112. angibt.

Analys
der gefundenen allgemeinen Kurve.

Die Senkung des Gewichts ist, je nachdem ein bestimmtes Prisma mit beyden Enden ganz frey, oder mit einem Ende H oder mit beyden Enden ganz unbeweglich aufliegt,

entweder $$u_0 = \frac{a_0^2 (c - a_0)^2 Q_0}{3cE^2}$$

oder $$u_{\prime} = \frac{a_{\prime}^3 (c-a_{\prime})^2 (4c-a_{\prime}) Q_{\prime}}{12^3 E^2}$$

oder $$u_{\prime\prime} = \frac{a_{\prime\prime}^3 (c-a_{\prime\prime})^3 Q_{\prime\prime}}{3c^3 E^2}$$

Ist $Q_{0} = Q_{\prime} = Q_{\prime\prime}$

und $a_{0} = a_{\prime} = a_{\prime\prime}$:

so verhalten sich die Senkungen u_{0}, $u_{\prime}$, $u_{\prime\prime}$ wie

$1 : \frac{a(4c-a)}{4c^2} : \frac{a(c-a)}{c^2}$.

Da $\frac{a(4c-a)}{4c^2} = \frac{a}{c^2}\left(c-\frac{a}{4}\right)$ als ächter Bruch < 1

und $\frac{a}{c^2}(c-a) < \frac{a}{c^2}\left(c-\frac{a}{4}\right)$: so erhellet, daß

$$u_{0} > u_{\prime} > u_{\prime\prime}.$$

Ein an einer Stelle mit einem Gewicht belastetes Prisma beugt sich also weniger, wenn es mit einem Ende H unbeweglich, noch weniger, wenn es mit beyden Enden unbeweglich, als wenn es mit beyden Enden frey aufliegt.

Für $a = \frac{c}{2}$ verhalten sich u_{0}, $u_{\prime}$, $u_{\prime\prime}$ wie $4 : 1\frac{3}{4} : 1$ und

für $a = \frac{c}{3}$ wie $4\frac{1}{2} : 1\frac{3}{8} : 1$.

Ist $u_{0} = u_{\prime} = u_{\prime\prime}$

und $a_{0} = a_{\prime} = a_{\prime\prime}$:

so verhalten sich die Gewichte $\underset{o}{Q}$, $\underset{'}{Q}$, $\underset{''}{Q}$ wie

$$1 : \frac{c^2}{a(c-\frac{a}{4})} = \frac{c^2}{a(c-a)}.$$

Da $\frac{c^2}{a(c-\frac{a}{4})} > 1$ und $\frac{c^2}{a(c-a)} > \frac{c^2}{a(c-\frac{a}{4})}$: so folgt,

daß $\underset{o}{Q} < \underset{'}{Q} < \underset{''}{Q}$.

Sollen Gewichte ein Prisma, es mag mit beyden Enden frey, oder mit einem Ende H oder mit beyden Enden unbeweglich aufliegen, gleich tief senken: so muß das Gewicht im zweyten Falle größer, im dritten noch größer, als im ersten Falle seyn.

Für $a = \frac{c}{2}$ verhalten sich $\underset{o}{Q}$, $\underset{'}{Q}$, $\underset{''}{Q}$ wie $1 : 2\frac{2}{7} : 4$

und

für $a = \frac{c}{3}$ wie $1 : 3\frac{3}{11} : 4\frac{1}{2}$.

Bricht das mit beyden Enden frey aufliegende Prisma bey der Senkung $\underset{o}{u}$: so wird begreiflich das mit einem Ende oder beyden Enden unbeweglich aufliegende früher, als es die nämliche Senkung $\underset{o}{u} = \underset{'}{u} = \underset{''}{u}$ erreichen kann, schon brechen.

Ist $\underset{o}{Q} = \underset{'}{Q} = \underset{''}{Q}$

und $\underset{o}{u} = \underset{'}{u} = \underset{''}{u}$:

so lassen sich auch die Verhältnisse der Entfernungen $\underset{o}{a}$, $\underset{'}{a}$, $\underset{''}{a}$, angeben, wo die Gewichte angebracht werden müssen.

Außer diesen angegebenen Gesichtspunkten gäbe es zwar noch mehrere andere, unter denen gleichnamige Größen sich vergleichen ließen; allein ich übergehe sie bis auf folgenden.

Das Gewicht, unter dem ein Prisma, je nachdem es mit beyden Enden frey, mit einem Ende H oder mit beyden Enden unbeweglich aufliegt, zerbricht, ist, wenn $a < 0{,}59 \ldots c$,

entweder $\underset{\circ}{Q} = P$

oder $\underset{\prime}{Q} = \frac{2cP}{(2c-a)}$

oder $\underset{\prime\prime}{Q} = \frac{cP}{(c-a)}$

und wenn $a > 0{,}59 \ldots c$

entweder $\underset{\circ}{Q} = P$

oder $\underset{\prime}{Q} = \frac{2c^2P}{a\,(3c-a)}$

odrr $\underset{\prime\prime}{Q} = \frac{cP}{(c-a)}$.

Für $a = \frac{2c}{3}$ verhalten sich $\underset{\circ}{Q}$, $\underset{\prime}{Q}$, $\underset{\prime\prime}{Q}$ wie $1 : 1\frac{2}{7} : 3$,

für $a = \frac{c}{2}$ wie $1 : 1\frac{3}{5} : 2$ und

für $a = \frac{c}{3}$ wie $1 : 1\frac{1}{5} : 1\frac{1}{2}$.

IV. Aufgabe.

Ein Prisma, mit beyden Enden gleichmäßig beweglich aufgelegt, ist Fig. VII. in zwey von H und H'

gleichweit entfernten Punkten c, c' mit gleichen Gewichten Q und Q beschwert. In welchem Verhältniß wird Q zu Q', und von welcher Natur die von Q, Q erzeuge Kurve seyn?

Auflösung.

Es sey $Q = Q' + q$.

Für das Kurvenstück Hc ist, wenn $Hm = x$, $HC = H'C' = a$ und $CC' = c - 2a$ gesetzt wird, $\frac{(c-a)Q' + aQ'}{c-x} = \frac{cQ'}{c-x}$ der Druck der Gewichte Q' und Q' auf den Punkt m und $\frac{xQ'}{c-x}$ der Druck des Punktes m auf H', xQ' also das Moment, womit der Punkt m nach unten gekrümmt wird, ferner ist $(a-x)q$ das Moment, womit m nach oben gekrümmt wird; die Differenz $xQ' - (a-x)q$ ist also das Moment, womit m nach einer Richtung allein gekrümmt wird. Folglich ist

$$E^2 \frac{d^2y}{dx} = -xdxQ' + (a-x)dxq,$$

$$E^2 \frac{dy}{dx} = (a^2 - x^2)\frac{Q'}{2} - (a^2 - 2ax + x^2)\frac{q}{2} + E^2 \operatorname{tg}\varphi,$$

indem $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi$ ist, wenn $x = a$.

Für $x = o$ ist $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha$, also

$$E^2 \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2Q'}{2} - \frac{a^2}{2}q + E^2\operatorname{tg}\varphi \text{ und}$$

$$C) \,.\,. \; E^2\operatorname{tg}\varphi = -\frac{a^2Q'}{2} + \frac{a^2}{2}q + E^2\operatorname{tg}\alpha, \text{ mithin}$$

$$E^2\frac{dy}{dx} = \frac{-x^2}{2}Q' + (2ax-x^2)\frac{q}{2} + E^2 tg\alpha.$$

$$B)\ldots E^2 y = \frac{-x^3}{6}Q' + (3ax^2-x^3)\frac{q}{6} + x E^2 tg\alpha.$$

Für $x = a$ ist $y = u$, also

$$D)\ldots E^2 u = \frac{-a^3}{6}Q' + \frac{2a^3}{6} q + a E^2 tg\alpha.$$

Für das andere Kurvenstück $H'c'$ wird auf analoge Weise, wenn $H'm' = x$ gesetzt wird,

$$c)\ldots E^2 tg\varphi = \frac{-a^2 Q'}{2} + \frac{a^2}{2} q + E^2 tg\alpha,$$

$$b)\ldots E^2 y = \frac{-x^3}{6}Q' + (3ax^2-x^3)\frac{q}{6} + x E^2 tg\alpha$$

$$d)\ldots E^2 u = \frac{-a^3 Q'}{6} + \frac{2a^3}{6} q + a E^2 tg\alpha.$$

Für das mittlere Kurvenstück $c\,c'$ sey $c\mu' = x$ und $\mu'\mu = y = m'\mu - m'\mu' = Y - u$: so ist der Druck der Gewichte Q' und Q' auf den Punkt μ $= \frac{aQ'}{a+x} + \frac{aQ'}{c-(a+x)} = \frac{ac\,Q'}{(a+x)[c-(a+x)]}$, der Druck des Punktes μ auf $H' = \frac{a\,Q'}{c-(a+x)}$ und das Moment der Krümmung für $\mu = a\,Q'$, der Krümmungs-Halbmesser also $= \frac{E^2}{aQ'}$ und die Krümmung $c\,c'$ wegen Beständigkeit des Krümmungshalbmessers ein Kreisbogen.

Setzt man nun

$$\frac{E^2 d^2y}{dx} = -adx\,Q': \text{ so wird}$$

$$\frac{E^2 dy}{dx} = -ax\,Q' + C.$$

Für $x = \frac{c}{2} - a$ ist $\frac{dy}{dx} = o$ also

$C = a(\frac{c}{a} - a)\, Q'$ und

A').. $E^2 \frac{dy}{dx} = a(\frac{c}{2} - a - x)\, Q'$,

$E^2 y = \frac{a}{2}\,[(c - 2a)x - x^2]\, Q' + C.$

Für $x = o$ sowohl als für $x = c - 2a$ ist $y = o$, also auch $C = o$ und

*) B').. $E^2 y = \frac{ax}{2}(c - 2a - x)\, Q'$

---

*) Ohne Differenzial- und Integralrechnung findet sich diese Gleichung auf folgende Art.

Es sey Fig. VII*. $tM = r$, $cc' = c - 2a$, $c\mu' = x$, $\mu'\mu = y$, $\mu\theta = v$, $\theta M = z$, $vM = u'$. Nun ist für den Kreis $v^2 = (2r - z)z$, also $r - \sqrt{(r^2 - v^2)} = z$. Setzt man für v seinen Werth $\frac{c - 2a}{2} - x$ und für z seinen Werth $u' - y$: so erhält man die Gleichung $r - \sqrt{r^2 - \left(\frac{c - 2a - x}{2}\right)^2} = u' - y$ und $u' - r + \sqrt{r^2 - \left(\frac{c - 2a - x}{2}\right)^2} = y$. Nimmt man von dieser Quadratwurzel nur die zwey ersten Entwicklungs-Glieder, indem bey der hier geltenden Voraussetzung, daß die Senkung des Prisma gering, also auch $v = \mu\theta$ im Verhältniß zu dem Krümmungshalbmesser $r = tM$ sehr gering ist, die übrigen Glieder außer Acht bleiben können: so wird

$$u' - r + r - \frac{\left(\frac{c - 2a - x}{2}\right)^2}{2r} = u' - \frac{(c - 2a - 2x)^2}{8r}$$

Aus (A′) wird für $x = o\ \frac{dy}{dx} = tg\,\varphi$ und, für $x = c-2a,\ \frac{dy}{dx} = tg\varphi$, also

$$C')\ ..\ E^2 tg\varphi = a\left(\frac{c}{2} - a\right) Q', \text{ und}$$

$$(c')\ E^2 tg\varphi' = -a\left(\frac{c}{2} - a\right) Q', \text{ mithin}$$

$$tg\varphi = - tg\varphi'.$$

Setzt man in (B′) $x = \frac{c}{2} - a$: so wird $y = u_{\prime} = v\,M$ also

$$D')\ ..\ E^2 u_{\prime} = \frac{a}{2}\left(\frac{c}{2} - a\right)^2 Q'.$$

Stellt man nun die beyden Werthe (C) und (C′) für $E^2 tg\varphi$ zusammen: so ergibt sich

$$q = \frac{a\,(c-a)\,Q' - 2\,E^2 tg\alpha}{a^2}.$$

$= y$. Ist $x = o$: so ist auch $y = o$, also $u_{\prime} - \frac{(c-2a)^2}{8r} = o$ und $u_{\prime} = \frac{(c-2a)^2}{8r}$. Da aus den statischen Betrachtungen das Krümmungsmoment für $cc' = a\,Q'$ gefunden wurde, also der Krümmungs-halbmesser oder Radius des Kreises $r = \frac{E^2}{aQ'}$ ist: so wird, dieser Werth von r in obige Gleichung gesetzt, $u_{\prime} = (c - 2a)^2 \frac{aQ'}{8E^2}$ und $E^2 y = (c - 2a)^2 \frac{aQ'}{8} - (c-2a-2x)^2 \frac{aQ'}{8} = \frac{ax}{2}(c-2a-x)\,Q'$.

Es ist also $Q = Q' + q = \frac{ac\,Q' - 2E^2 tg\alpha}{a^2}$,

$$Q' = \frac{a^2 Q + 2E^2 tg\alpha}{ac} \text{ und}$$

$$q = \frac{a(c-a)\,Q - 2E^2 tg\alpha}{ac}.$$

Bringt man diese Werthe von Q′ und q in die Gleichungen (B), (b) und (B′): so ist die Natur der Kurvenstücke Hc, H′c′ und cc′ bestimmt.

Diese Auflösung schließt die zwey speziellen Fälle in sich, nämlich wenn das Prisma in H und H′ vollkommen unbeweglich und vollkommen frey aufliegt.

Im ersten Fall ist $tg\alpha = 0$, also $Q = \frac{c}{a} Q'$,

$Q' = \frac{a}{c} Q$, $q = \frac{(c-a)}{c} Q$ und

für das Kurvenstück Hc sowohl als H′c′

$E^2 tg\varphi = \frac{a^2}{2c}(c-2a)\,Q$, $E^2 u = \frac{a^3}{6c}(2c-3a)\,Q$,

$E^2 y = [3a(c-a) - cx]\,\frac{x^2}{6c} Q$;

für das mittlere Kurvenstück cc′ aber

$E^2 tg\varphi = \frac{a^2}{2c}(c-2a)\,Q$, $E^2 u = \frac{a^2}{8c}(c-2a)^2\,Q$,

$E^2 y = \frac{a^2}{2c}(c-2a-x)\,x\,Q$, $E^2 Y = E^2(u+y)$

$= \frac{a^2}{6c}[a(2c-3a) + 3(c-2a-x)\,x]\,Q$.

Im zweyten Fall ist $q = o$, also $Q = Q'$ und für das Kurvenstück H c sowohl als H′ c′

$E^2 tg\alpha = \frac{a}{2}(c - a) Q'$, $E^2 tg\varphi = \frac{a}{2}(c - 2a) Q'$,

$E^2 u = \frac{a^2}{6}(3c - 4a) Q'$, $E^2 y = [3a(c-a) - x^2] \frac{x}{6} Q'$;

für das mittlere Kurvenstück cc′ aber

$E^2 tg\varphi = \frac{a}{2}(c - 2a) Q'$, $E^2 u = \frac{a}{8}(c - 2a)^2 Q'$,

$E^2 y = \frac{a}{2}(c - 2a - x) x Q'$, $E^2 Y = E^2 (y + u)$

$= \frac{a}{6}[a(3c - 4a) + 3(c - 2a - x) x] Q'$.

Ist $a = \frac{c}{2}$: so fallen beyde Gewichte Q, Q in eines zusammen, und es ist

im ersten Fall $Q = 2 Q'$, $Q' = \frac{Q}{2}$, $q = \frac{Q}{2}$ und

$Q + Q = 4 Q' = \Sigma Q$.

Für die Kurvenstücke Hc und H′c′ ist $E^2 tg\varphi = o$, die Punkte c, c′ des Kreisbogens fallen mit der Mitte M in einen Punkt zusammen, wo $\varphi = o$ ist;

$E^2 u = \frac{c^3 Q}{96} = \frac{c^3 \Sigma Q}{192}$, $E^2 y = (3c - 4x) \frac{x^2}{24} Q$

$= (3c - 4x) \frac{x^2}{48} \Sigma Q$.

Für das mittlere Kurvenstück cc′, welches ein Punkt M ist, ist $x = o$, also $E^2 u = o$, $E^2 y = o$,

$E^2 Y = \frac{c^3 Q}{96} = \frac{c^3}{192} \Sigma Q = E^2 u$.

Im zweyten Fall ist $Q = Q'$, $Q' + Q' = \Sigma Q'$.

Für die Kurvenstücke Hc und H'c' ist

$$E^2 \,\mathrm{tg}\alpha = \frac{c^2 Q'}{8} = \frac{c^2}{16} \Sigma Q', E^2 \mathrm{tg}\varphi = o, E^2 u = \frac{c^3 Q'}{24}$$

$$= \frac{c^3}{48} \Sigma Q', E^2 y = (3c^2 - 4x^2)\frac{xQ'}{24} = (3c^2 - 4x^2)\frac{x}{48}\Sigma Q'.$$

Für das mittlere Kurvenstück cc', welches ein Punkt M ist, ist $x = o$, also $E^2 u = o$, $E^2 y = o$,

$$E^2 Y = \frac{c^3 Q'}{24} = \frac{c^3}{48} \Sigma Q' = E^2 u.$$

Diese nämlichen für $a = \frac{c}{2}$ in den beyden Fällen angegebenen Formeln lassen sich aus den allgemeinen Gleichungen der dritten Aufgabe herleiten, wenn man $a = \frac{c}{2}$ und im ersten Fall $\mathrm{tg}\alpha = o$, im zweyten aber $q = o$, $q' = o$ setzt.

Analys
der gefundenen Kurve.

Das Krümmungsmoment M' für H oder H' ist, ohne Rücksicht auf sein Zeichen, $= aq = \frac{1}{c}[a(c-a)Q - 2 E^2 \mathrm{tg}\alpha]$.

Das Krümmungsmoment M für den Kreisbogen cc' aber ist $= aQ' = \frac{1}{c}[a^2 Q + 2 E^2 \mathrm{tg}\alpha]$.

$$\text{Ist } E^2 \mathrm{tg}\alpha < \frac{a}{4}(c - 2a) Q:$$

so wird $M' > M$ und das Prisma bricht in H und H' zuerst und zu gleicher Zeit.

Ist $E^2 tg\alpha = \frac{a}{4}(c-2a) Q$:

so wird $M' = M$ und das Prisma bricht in H, cc′ und H′ zu gleicher Zeit.

Ist $E^2 tg\alpha > \frac{a}{4}(c-2a) Q$:

so wird $M' < M$ und das Prisma bricht zuerst in cc′.

Nun wird für $tg\alpha = o$ $M' > M$, wenn $a < \frac{c}{2}$ und $M' = M$, wenn $a = \frac{c}{2}$.

Ein mit beyden Enden vollkommen unbeweglich aufliegendes Prisma bricht also, solange $a < \frac{c}{2}$, zuerst in H und H′, und, wenn $a = \frac{c}{2}$, in H, cc′, welches ein Punkt M ist, und H′ zu gleicher Zeit.

Ferner wird für $q = o$ und $Q = Q'$

$$E^2 tg\alpha = \frac{a}{2}(c-a) Q' = \frac{a c Q' + a (c-2a) Q'}{4} > \frac{a}{4}(c-2a) Q', \text{ also } M' < M.$$

Ein mit beyden Enden ganz frey aufliegendes Prisma bricht mithin in cc′ zuerst.

Setzt man das Moment für H oder H′ des mit beyden Enden ganz unbeweglich aufliegenden Prisma gleich dem Brechungsmoment $N = \frac{a}{c}(c-a)P$, nämlich $\frac{a}{c}(c-a) Q = \frac{a}{c}(c-a) P$; so wird $Q = P$.

Das mit beyden Enden ganz unbeweglich aufliegende, in der Entfernung $a < \frac{c}{2}$ von H und H′ mit den zwey Gewichten Q und Q beschwerte Prisma ist also eine doppelt so große Last zu tragen im Stande, ehe es in H und H′ bricht, als ein mit beyden Enden frey aufliegendes, in der Entfernung a von H oder H′ mit dem einzigen Gewicht Q = P beschwertes Prisma, dessen Bruchstelle in dem Beschwerungspunkt ist.

Setzt man das Moment für cc′ des mit beyden Enden ganz frey aufliegenden Prisma gleich dem Brechungsmoment, nämlich $\frac{1}{c}[a^2Q' + a(c-a)Q'] = aQ'$ $= \frac{a}{c}(c-a)P$: so wird $Q' = \frac{(c-a)}{c}P$.

Das mit beyden Enden ganz frey aufliegende, in der Entfernung $a < \frac{c}{2}$ von H und H′ mit den zwey Gewichten Q′ und Q′ beschwerte Prisma trägt also eine $2\frac{(c-a)}{c}$ mal so große Last, ehe es in cc′ bricht, als ein mit beyden Enden frey aufliegendes, in der Entfernung a von H oder H′ mit dem einzigen Gewicht P beschwertes Prisma.

Für $a = \frac{c}{2}$ ist $\frac{2(c-a)}{c} = 1$, wie von selbst erhellet.

Für $a = \frac{c}{3}$ ist $\frac{2(c-a)}{c} = 1\frac{1}{3}$ und

für $a = \frac{c}{4}$ ist $\frac{2(c-a)}{c} = 1\frac{1}{2}$.

Vergleicht man nun die Brechungsgewichte der mit beyden Enden unbeweglich und frey aufliegenden, in der Entfernung a von H und H′ mit Q, Q und Q′, Q′ beschwerten Prismen: so ergibt sich das Verhältniß $Q + Q : Q' + Q' = Q : Q' = c : c - a$.

Das nämliche Verhältniß findet zwischen dem Brechungsgewicht $\underset{\prime}{Q}$, womit ein mit beyden Enden unbeweglich aufliegendes Prisma in der Entfernung a von H oder H′ einseitig belastet ist, und zwischen dem Brechungsgewicht P, womit ein mit beyden Enden frey aufliegendes Prisma in der nämlichen Entfernung a von H oder H′ gleichfalls einseitig beschwert ist, Statt. (S. 22).

Vergleicht man die Brechungsgewichte $Q + Q$ und $\underset{\prime}{Q}$ der doppel- und einseitig in dem Abstande a belasteten, mit beyden Enden unbeweglich aufliegenden Prismen, nämlich $Q + Q = 2P$ und $\underset{\prime}{Q} = \frac{c}{c - a} P$ miteinander: so erhellet: daß $2Q : \underset{\prime}{Q} = 2(c - a) : c$.

Für $a = \frac{c}{2}$ ist $2Q : \underset{\prime}{Q} = 1 : 1$, wie von selbst einleuchtet.

Für $a = \frac{c}{3}$ ist $2Q : \underset{\prime}{Q} = 1\frac{1}{3} : 1$ und

für $a = \frac{c}{4}$ ist $2Q : \underset{\prime}{Q} = 1\frac{1}{2} : 1$.

Vergleicht man die Brechungsgewichte $Q' + Q'$ und P der doppel- und einseitig in dem Abstande a belasteten, mit beyden Enden frey aufliegenden Prismen,

nämlich $Q' + Q' = \frac{2(c-a)}{c} P$ und $P = P$: so findet sich $2 Q' : P = 2 (c - a) : c$, das vorige Verhältniß.

Aus diesen Berechnungen leuchtet der statische Vortheil hervor, welcher aus der Vertheilung der Belastung entspringt.

Differenzirt man das Brechungsmoment $\frac{a}{c}(c-a) Q = N$ für H und H′ des mit beyden Enden unbeweglich aufliegenden und doppelseitig beschwerten Prisma: so erhält man für $a = \frac{c}{2}$ ein Minimum $Q = \frac{4N}{c}$.

Aus der Zusammenstellung des Moments für cc′ des nämlichen Prisma mit dem Brechungsmoment, nämlich aus $\frac{a^2}{c} Q = N$ erhellet, daß für $a = o$ ein Maximum (im trivialen Sinne) $Q = \infty$ Statt finde.

Je näher nämlich die Gewichte Q, Q den Stützpunkten H, H′ gebracht werden, desto mehr ist das Prisma zu tragen im Stande.

Aus der Gleichung $a Q' = N$, dem Brechungsmoment für cc′ des mit beyden Enden frey aufliegenden und doppelseitig beschwerten Prisma geht hervor, daß für $a = \frac{c}{2}$ ein Minimum $Q' = \frac{2N}{c}$ und für $a = o$ ein Maximum $Q' = \infty$ Statt habe.

Vergleicht man die Minima $Q = \frac{4N}{c}$ und $Q' = \frac{2N}{c}$ der mit beyden Enden unbeweglich und frey aufliegen-

den, in der Mitte mit den doppelten Gewichten Q, Q und Q′, Q′ beschwerten Prismen: so findet man Q = 2 Q′ und Q + Q = 2 (Q′ + Q′), wie schon in der ersten Aufgabe gefunden wurde.

Vergleicht man die Senkungen u und u′ der doppelseitig beschwerten, mit beyden Enden unbeweglich und frey aufliegenden Prismen, nämlich

$$u = \frac{a^3}{6c\,E^2}(2c - 3a)\,Q \text{ und } u' = \frac{a'^2}{6\,E^2}(3c - 4a')Q':$$

so wird, wenn $Q = Q'$ und

$$a = a',$$
$$u < u',$$

weil $2ac < c^2 + a^2$, selbst wenn $a = \frac{c}{2}$ ist.

Vergleicht man die größten Senkungen U und U′ in der Mitte der vorigen Prismen, nämlich $U = u + u$,

$$= \frac{a^2}{48E^2}(6c - 8a)Q \text{ u. } U' = u' + u', = \frac{a'}{48\,E^2}(6c^2 - 8a'^2)Q':$$

so ergibt sich, wenn $Q = Q'$ und

$$a = a',$$
$$U < U',$$

weil $a < c$ ist.

Für $a = \frac{c}{3}$ wird $u : u' = 1 : 5$ und

$$U : U' = 1 : 4{,}6.$$

Für einseitig in dem nämlichen Abstande $a = \frac{c}{3}$ belastete Prismen fand man das Verhältniß $u : u' = 1 : 4{,}5$.

Für $a = \frac{c}{2}$ wird $u : u' = 1 : 4$ und

$U : U' = 1 : 4$,

wie schon bekannt ist.

Wenn $u = u'$ und

$a = a'$:

so ist $Q > Q'$ und

$U > U'$, solange $a < \frac{c}{2}$.

Für $a = \frac{c}{3}$ wird $Q : Q' = 5 : 1$ und

$U : U' = 1,087 : 1$.

Für $a = \frac{c}{2}$ wird $Q : Q' = 4 : 1$ und

$U : U' = 1 : 1$

weil in diesem Fall $u = U$ und $u' = U'$ ist.

Wenn $U = U'$ und

$a = a$:

so ist $Q > Q'$ und

$u < u'$, solange $a < \frac{c}{2}$.

Für $a = \frac{c}{3}$ wird $Q : Q' = 4,6 : 1$

$u : u' = 1 : 1,087$.

Für $a = \frac{c}{2}$ wird $Q : Q' = 4 : 1$ und

$u : u' = 1 : 1$,

weil in diesem Fall $U = u$ und $U' = u'$ ist.

Folgende Bestimmungen der Kurve verdienen noch zuletzt angeführt zu werden, nämlich das Maximum von $Y = \frac{a}{24}[4a(3c-4a) + 3(c-2a)^2]\,Q$, welches

für $x = \frac{c-2a}{2}$ oder in der Mitte des Prisma Statt hat, wie dieß von selbst einleuchtet, und die Indifferenzpunkte o und o′, welche in die Entfernung

$x = \frac{a(c-a)Q - 2E^2 \, tg\alpha}{cQ}$ von H und H′ treffen.

V. Aufgabe.

Ein horizontal, mit beyden Enden nicht ganz unbeweglich aufliegendes Prisma wird Fig. VIII. von dem ihm eigenen Gewichte allein oder von diesem und noch einem auf dasselbe gleichmäßig vertheilten Gewichte gekrümmt. Von welcher Natur wird die davon entstehende Kurve seyn?

Auflösung.

Ich bediene mich der zweyten Auflösungsmethode der ersten Aufgabe. Wenn die Ende des Prisma nicht ganz unbeweglich aufliegen: so bilden sie mit der Horizontallinie in H und H′ die Winkel α und β. Es seyen o und o′ die Indifferenzpunkte, die Winkel der Tangenten in o und o′ mit der Horizontal-Linie gleich o und o′, $ho = HO = a$, $po' = OO' = 2a''$, $o'h' = O'H' = a'$, der Winkel der Tangente in c, der Mitte von o o′, mit der Horizontal-Linie gleich φ, $oM = x$, $mM = y$ und G das Gewicht auf den Fuß der Länge c des Prisma: so ist xG das dem Kurvenstück mo zugehörige Gewicht und $a''G$ der vom Zwischenstück o o′ auf jeden der beyden Punkte o und o′ erzeugte Druck, $\frac{x^2}{2}G + a''xG$ also das Mo-

ment des längs mo und in o wirkenden Gewichts für den Punkt m, und

$$E^2 \frac{d^2y}{dx} = -\frac{x^2}{2} dx\, G - a'' x\, dx\, G;$$

$$E^2 \frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{6} G - \frac{a''x^2}{2} G + E^2 tg o,$$

weil $\frac{dx}{dy} = tg.o$ für $x = o$ ist;

ferner

$$\text{I}) .. E^2 tg.o = (a^3 + 3a^2a'') \frac{G}{6} + E^2 tg\alpha,$$

weil $\frac{dy}{dx} = tg\alpha$ für $x = a$ ist, und

$$E^2 \frac{dy}{dx} = (a^3 + 3a^2a'' - 3a''x^2 - x^3) \frac{G}{6} + E^2 tg\alpha,$$

so wie

$$\text{E}) .. E^2 y = [(4a^3 + 12a^2a'')x - 4a''x^3 - x^4] \frac{G}{24} + x E^2 tg\alpha.$$

Nun ist $y = Hh = u$ für $x = a$, also

$$E^2 u = (3a^4 + 8a^3a'') \frac{G}{24} + a E^2 tg\alpha.$$

Für das andere Kurvenstück $H'o'$ sey $o'N = x$ und $nN = y$: so ergeben sich nach den Gesetzen der Aehnlichkeit folgende Formeln:

$$\text{II}) .. E^2 tg.o' = (a'^3 + 3a'^2a'') \frac{G}{6} + E^2 tg\beta \text{ und}$$

$$\text{E}') .. E^2 y = (4a'^3x + 12a'^2a''x - x^4 - 4a''x^3) \frac{G}{24} + x E^2 tg\beta,$$

$$E^2 u' = (3a'^4 + 8a'^3a'') \frac{G}{24} + a' E^2 tg\beta.$$

Hierbey ist zu bemerken, daß tg.o′ mit tgβ, eben so wie vorher tg.o mit tgα positiv ist.

Für das Zwischenstück o o′ findet man auf folgende Weise die nöthigen Bestimmungen. Es sey $p\mu' = x$, $\mu\mu' = y$: so ist der Druck der gewichtigen Kurvenstücke oμ und o′μ auf den Punkt $\mu = a''$ G. Dieser Druck übt auf o′ den Druck $\frac{a''x}{2a''}G = \frac{x}{2}G$ aus und das Moment dieses Druckes in o′ für den Punkt μ ist $= (2a''-x)\frac{x}{2}$ G, also

$$\frac{E^2dy}{dx} = -(2a''-x)\frac{x}{2}\,dx\,G;$$

$$\frac{E^2d^2y}{dx} = -(3a''x^2-x^3)\frac{G}{6} + C.$$

Für $x = a''$ ist $\frac{dy}{dx} = tg\varphi$, also

$$E^2tg\varphi = -\frac{2a''^3}{6}G + C \text{ und}$$

$$C = \frac{2a''^3}{6}G + E^2tg\varphi, \text{ mithin}$$

$$\frac{E^2dy}{dx} = -(3a''x^2-x^3-2a''^3)\frac{G}{6} + E^2tg\varphi.$$

Für $x = o$ ist $\frac{dy}{dx} = tg.o$, also

$$1) \ldots E^2tg.o = \frac{2a''^3}{6}G + E^2tg\varphi.$$

Für $x = 2a''$ ist $\frac{dy}{dx} = tg.o'$ und

$$2) \ldots E^2tg.o' = -\frac{2a''^3}{6}G + E^2tg\varphi.$$

Hierbey ist zu bemerken, daß tgo' der vorhergehenden tgo entgegengesetzt ist.

Ferner ist

$$E'') \,..\, E^2 y = (x^4 - 4a''x^3 + 8a''^3 x)\frac{G}{24}x + E^2 tg\varphi + C.$$

Nun ist für $x = o$ $E^2 y = E^2.po = E^2(Oo - O'o')$

$$= E^2(u - u') = [3(a^4 - a'^4) + 8a''(a^3 - a'^3)]\frac{G}{24}$$

$$+ E^2(atg\alpha - a'tg\beta) = C \text{ und}$$

$$E^2 y = [3(a^4 - a'^4) + 8a''(a^3 - a'^3) + x^4$$

$$+ 4a''(2a''^2 x - x^3)]\frac{G}{24} + E^2(atg\alpha - a'tg\beta + xtg\varphi).$$

Für $x = a''$ ist $y = u'' = dc$ und $Cc = u' + u'' = U$, also

$$D) \,..\, E^2 u'' = [3(a^4 - a'^4) + 8a''(a^3 - a'^3) + 5a''^4]\frac{G}{24}$$

$$+ E^2(atg\alpha - a'tg\beta + a''tg\varphi).$$

Für $x = 2a''$ ist $y = o$, also

$$3) \,..\, o = [3(a^4 - a'^4) \;\; 8a''(a^3 - a'^3)]\frac{G}{24} + E^2(atg\alpha$$

$$- a'tg\beta + 2a''tg\varphi).$$

Stellt man die Gleichung I) mit derjenigen 1) und die Gleichung II) mit derjenigen 2) zusammen, nachdem der positive Werth der tg.o' II) zuvor negativ, und hiemit mit dem negativen Werth der tg.o' 2) gleichartig gemacht wurde: so wird

$$III) \,..\, (a^3 + 3a^2 a'')\frac{G}{6} + E^2 tg\alpha = \frac{2a''^3}{6} G + E^2 tg\varphi \text{ und}$$

$$IV) \,..\, (a'^3 + 3a'^2 a'')\frac{G}{6} + E^2 tg\beta = \frac{2a''^3}{6} G - E^2 tg\varphi.$$

Mittels der Gleichungen 3), III) und IV), dann der Gleichung $a + 2a'' + a' = c$ lassen sich nun die unbekannten Größen φ, a, a'' und a' finden, und hiemit aus den Gleichungen E), E') und E'') die Natur der Kurve bestimmen.

Ich beschränke mich bloß für die zwey Fälle, daß das Prisma mit beyden Enden 1) ganz unbeweglich und 2) ganz frey aufliegt, die nähern Bestimmungen anzugeben.

In ersterm Fall ist $tg\alpha = o$ und $tg\beta = o$, also $\varphi = o$, $a = a'$ und $a''^3 - \frac{3}{2} a'' a^2 - \frac{a^3}{2} = o$, a'' mithin $= 1{,}3675.a$, ferner $a = a' = \frac{c}{4{,}735} = 0{,}2112.\,c$ und $a'' = 0{,}2887.\,c$.

Wird nun $HH' = c$ in 4 gleiche Theile von H nach H' abgetheilt: so fällt der Indifferenzpunkt o etwas diesseits des ersten Theilungspunktes gegen H zu, der zweyte Indifferenzpunkt o' aber eben so viel jenseits des dritten Theilungspunktes gegen H', als der erste o diesseits des ersten Theilungspunktes.

Im zweyten Fall setze man $a = a' = o$ und in der Gleichung (E'') $a'' = \frac{c}{2}$ und $\varphi = o$: so erhält man $E^2 y = (x^4 - 2cx^3 + c^3 x)\frac{G'}{24}$, indem $C = o$, weil y mit x verschwindet — die nämliche Gleichung, welche Eitelwein auf eine andere Weise §. 120. für diesen Fall gefunden.

Analys
der gefundenen Kurve.

Das Krümmungsmoment für H oder H′ des mit beyden Enden unbeweglich aufliegenden, mit dem Gewicht c G gleichmäßig beschwerten Prisma ist $M' = \frac{a^2 G}{2} + a a'' G = 1,8675 a^2 G$;

dasjenige für c, die Mitte des nämlichen Prisma aber $M = \frac{a''^2}{2} G = 0,9350 a^2 G$.

Es ist also $M' > M$, und das Prisma bricht, wenn dieses geschieht, zuerst in H und H′.

Gewöhnlich werden die unbeweglich befestigten Ende der auf allen Punkten belasteten Balken z. B. der Magazinböden durch verschiedene Vorrichtungen noch verstärkt oder gestützt. Hier ist also der statische Grund hievon nachgewiesen.

Setzt man das Krümmungsmoment für H und H′ des Prisma gleich dem Brechungsmoment N, nämlich $1,8675 a^2 G = 0,0832 c^2 G = \frac{a}{c}(c - a) P$, und nimmt den Beschwerungspunkt für die Last P in der Mitte also $a = \frac{c}{2}$ an: so wird $c G = 3,0048 P$.

Das mit beyden Enden unbeweglich aufliegende, gleichmäßig beschwerte Prisma ist also eine mehr als 3mal so große Last P, mit welcher es, mit beyden Enden frey aufliegend und in der Mitte beschwert, zerbricht, zu tragen im Stande, ehe es in H und H′ bricht.

Das Krümmungsmoment für c, die Mitte des mit beyden Enden frey aufliegenden, mit dem Gewicht c G′ gleichmäßig beschwerten Prisma ist $M = \frac{c^2}{8} G'$.

Setzt man dieses Moment gleich dem Brechungs-Moment N, nämlich $\frac{c^2 G'}{8} = \frac{a}{c}(c-a) P$, und nimmt den Beschwerungspunkt für die Last P wie vorhin in die Mitte also $a = \frac{c}{2}$ an: so wird $c G' = 2P$.

Das mit beyden Enden frey aufliegende, gleichmäßig beschwerte Prisma ist also eine 2mal so große Last P, mit welcher es, mit beyden Enden frey aufliegend und in der Mitte beschwert, zerbricht, zu tragen im Stande, ehe es in c bricht.

Vergleicht man diese Brechungsgewichte c G und c G′ der gleichmäßig beschwerten, mit beyden Enden unbeweglich und frey aufliegenden Prismen miteinander: so ergibt sich das Verhältniß $c G : c G' = 1{,}5024 : 1$.

Wird das Brechungs-Gewicht c G des mit beyden Enden unbeweglich aufliegenden Prisma auf zwey Punkte in gleichen Abständen a, a von H unp H′ gleich vertheilt: so bricht das Prisma in H und H′, wenn $a = 0{,}2109 . c$; wie dieses aus der Gleichung $0{,}0832 c^2 G = \frac{a}{c}(c-a) Q$, $Q = \frac{c}{2} G$ gesetzt, hervorgeht.

Wird aber das nämliche Gewicht bloß auf einen Punkt angebracht: so bricht das Prisma in H

oder H′, je nachdem $a = 0,0916\,c$ oder $a = 0,9084\,c$ ist, wie dieses obige Gleichung angibt, wenn darin $Q = cG$ gesetzt wird.

Wird das Brechungsgewicht cG' des mit beyden Enden frey aufliegenden Prisma auf zwey Punkte in gleichen Abständen a, a von H und H′ gleich vertheilt: so bricht das Prisma in cc' in Fig. VII., wenn $a = \frac{c}{4}$; wie dieses die Gleichung $\frac{c^2}{8} G' = aQ'$, $Q = \frac{c}{2} G'$ gesetzt, angibt.

Wird aber das vorige Gewicht bloß auf einen Punkt angebracht: so bricht das Prisma im Beschwerungspunkt, wenn $a = 0,1465.\,c$ oder $a = 0,8535.\,c$ ist, wie dieses aus der Gleichung $\frac{c^2 G'}{8} = \frac{a}{c}(c - a)\,P$, $P = cG'$ gesetzt, gefunden wird.

Die größte Ordinate des mit beyden Enden unbeweglich aufliegen und gleichmäßig beschwerten Prisma ist $U = C\,c$ nahe $= \frac{c^4 G}{384\,E^2}$.

Diejenige des mit beyden Enden frey aufliegenden und gleichmäßig beschwerten Prisma aber findet sich *) $U' = \frac{5c^4}{384} G'$, wenn nämlich in der für dieses Prisma (S. 73.) angegebenen Gleichung $x = \frac{c}{2}$ gesetzt wird.

---

*) Den nämlichen Werth für U′ erhält man mittels der Gleichung (D) (S. 70.), welche für $tg\,\alpha = 0$ und $tg\,\beta = 0$ also auch für $tg\,\varphi = 0$

Vergleicht man diese beyden Ordinaten U und U′ miteinander: so findet man U : U′ = 1 : 5, wenn cG = cG′ gesetzt wird.

Ein gleichmäßig beschwertes Prisma wird also eine 5mal kleinere Senkung in der Mitte erleiden, wenn es mit beyden Enden unbeweglich, als wenn es frey aufliegt.

Wird das Gewicht cG des mit beyden Enden unbeweglich aufliegenden Prisma auf zwey Punkte, in gleichen Abständen von H und H′ und unter sich, gleich vertheilt: so senkt sich das Prisma in seiner Mitte zu $U = \frac{c^3Q}{129{,}6\,E^2} = \frac{c^4G}{259{,}2\,E^2}$.

Vergleicht man diese Senkung mit derjenigen U des nämlichen, aber mit cG in allen Punkten gleichmäßig beschwerten Prisma: so erhält man U : U′ = 1 : 1,481.

Wird aber das Gewicht cG in der Mitte vereiniget angebracht: so senkt sich das vorige Prisma zu $u = \frac{c^3Q}{192\,E^2} = \frac{c^4\,G}{192\,E^2}$. Es ist also U : u = 1 : 2.

$E^2u'' = [3(a^4 - a'^4) + 8a''(a^3 - a'^3) + 5a''^4]\,\frac{G'}{24}$ und diese Gleichung für a = o und a′ = o also auch für 2a″ = c $E^2U' = \frac{5c^4G'}{384}$ u. $U' = \frac{5c^4G'}{384\,E^2}$ wird die nämliche Gleichung, welche auch Eitelwein §. 120. angibt.

Vertheilt man eben so das Gewicht cG' des mit beyden Enden frey aufliegenden Prisma auf zwey von H, H' und unter sich gleich weit abstehende Punkte: so ist die Senkung des Prisma in der Mitte $U' = \frac{c^3 Q}{28,17 E^2} = \frac{c^4 G'}{56,34 E^2}$. Es findet daher zwischen dieser Senkung und derjenigen U' des nämlichen, aber mit cG' in allen Punkten gleichmäßig beschwerten Prisma das Verhältniß $U' : U' = 1 : 1,363$. Statt.

Vereinigt man aber das Gewicht cG' in der Mitte: so senkt sich das vorige Prisma zu $u' = \frac{c^3 Q}{48 E^2} = \frac{c^4 G}{48 E^2}$. Es ist mithin

$$U' : u' = \tfrac{5}{8} : 1 = 1 : 1,6.$$

wie es auch Eitelwein angibt.

Aus der Vergleichung dieser entwickelten Verhältnisse geht die Bemerkung hervor, daß die Vertheilung des Gewichts auf mehr als einen Punkt der Balken ihrer Steifigkeit in einem höhern Grad vortheilhaft ist, wenn sie mit beyden Enden unbeweglich, als wenn sie frey aufliegen.

VI. Aufgabe.

Das mit beyden Enden nicht ganz unbewegliche, dazwischen mit einem Gewicht Q: beschwerte Prisma habe eine schiefe Lage Fig. IX.; in welchem Verhältniß wird Q zu Q', und von welcher Beschaffenheit die von Q erzeugte Kurve seye?

Auflösung.

Man setze den Neigungswinkel des Prisma gegen die Horizontal-Linie = w, den Winkel der Tangente

in H mit der letzten Linie $= \alpha$, den andern aber in $H' = \beta$, die Länge des Prisma $= c$, $Hc = a$, also $hc' = a \cos. w$, $c'H' = (c-a) \cos. w$, $hH' = c \cos. w$, ferner $hM = x$, $Mm = y$: so ist $r = -\frac{dv^3}{d^2y dx}$, wenn die Beugung des Prisma nicht bedeutend ist,

$$= -\frac{dx^3.\sec.^3 w}{d^2y\, dx} = -\frac{dx^2.\sec.^3 w}{d^2y}, \text{ folglich}$$

$$\frac{E^2.\, d^2y}{\sec.^3 w.\, dx} = -(c-a)\frac{x}{c} dxQ' + (a \cos. w - x)\, dxq.$$

Behandelt man diese Gleichung auf die Art, wie schon öfters gezeigt wurde: so erhält man

$$C)..\, E^2\cos.^3 w.\mathrm{tg}\varphi = -(c-a)\frac{a^2}{2c}\cos^2.\, w.\, Q' + \frac{a^2}{2}\cos.^2 w.q + E^2\cos.\, w.\mathrm{tg}\alpha,$$

$$E)..\, E^2\cos.^3 w.\, y = -(c-a)\frac{x^3}{6c}Q' + (3a\cos.w.x^2 - x^3)\frac{q}{6} + xE^2\cos^3 w.\, \mathrm{tg}\alpha.$$

Für $x = o$ ist $y = hH = c \sin.\, w$, also

$$E^2.\cos.^3 w.y = -(c-a)\frac{x^3}{6c}Q' + (3a\cos.\, w.x^2 - x^3)\frac{q}{6} + xE^2\cos.^3 w.\mathrm{tg}\alpha + E^2\cos.^3 w.\sin.w$$

Setzt man $x = a \cos.\, w$; so wird $y = c'c' = u$ also

$$D)..\, E^2\cos.^3 w.u = -(c-a)\frac{a^3}{6c}\cos.^3\, w.\, Q' + \frac{2a^3}{6}\cos.^3 w.\, q + a\cos.\, w.\, E^2\cos.^3\, \mathrm{tg}\alpha + E^2\cos.^3 w.\, \sin.\, w.$$

Wird ferner $c'N = x$ gesetzt: so wird

$$E^2 \cos.^3 w \frac{d^2y}{dx} = -\frac{a}{c}[(c-a)\cos. w\text{-}x]\, dx\, Q' + x\, dx\, q'.$$

Behandelt man diese Gleichung auf die schon bekannte Weise: so erhält man

$$c) .. E^2 \cos^3 w.\mathrm{tg}\varphi = \frac{a}{2c}(c-a)^2 \cos.^2 w.\, Q' - (c-a)^2 \cos.^2 w.\frac{q'}{2} + E^2 \cos.^3 w.\mathrm{tg}\beta,$$

$$e) .. E^2 \cos.^3 w.\, y = \frac{a}{6}[3\,(c-a)^2 \cos.^2 w.\, x - 3\,(c\text{-}a)\cos. w.\, x^2 + x^3]Q' - [3(c\text{-}a)^2 \cos.^2 w.x - x^2]\frac{q'}{6} + xE^2 \cos^3 w.\mathrm{tg}\beta + E^2 \cos^3. w.\, u,$$

$$d) .. E^2 \cos^3 .w.u = \frac{-a}{6c}(c-a)^3 \cos^3. w.\, Q' + \frac{2}{6}(c\text{-}a)^3 \cos^3 .w.q' - (c\text{-}a)\cos.w.E^2 \cos^3 .w.\, \mathrm{tg}\beta.$$

Stellt man nun die Gleichungen (C) und (c), (D) und (d) zusammen: so findet man

$$q = \frac{ac(c\text{-}a)Q' - 2.\cos.wE^2[(2c+a)\mathrm{tg}\alpha + (c\text{-}a)\mathrm{tg}\beta + 3c\,\mathrm{tg}w],}{2a^2c}$$

$$q' = \frac{ac(c-a)Q' + 2.\cos.w\,E^2[a\,\mathrm{tg}\alpha + (3c-a)\mathrm{tg}\beta + 3c\,\mathrm{tg}w]}{2c\,(c-a)^2}$$ also

$$Q = Q' + q + q' = \frac{ac^2(c\text{-}a)Q' - 2c.\cos.wE^2[(2c\text{-}3a)\mathrm{tg}\alpha + (c\text{-}3a)\,\mathrm{tg}\beta + 3(c\text{-}2a)\mathrm{tg}w]}{2a^2(c\text{-}a)^2}$$ und

$$F) .. Q' = \frac{2a^2(c\text{-}a)^2 Q + 2c.\cos.w\,E^2[(2c\text{-}3a)\,\mathrm{tg}\alpha + (c\text{-}3a)\,\mathrm{tg}\beta + 3\,(c\text{-}2a)\mathrm{tg}w]}{ac^2(c-a).}$$

Setzt man diese Werthe für q, q′ und Q′ in die Gleichungen (E) und (e): so ist die Kurve bestimmt, und die Aufgabe durch diese zwey Gleichungen und die Gleichung (F) gelöst.

Hat das Prisma die Lage Fig. X.: so erhält man die Formeln für diesen Fall aus denen fur den ersten Fall, wenn man das Prisma Fig. IX. um den Punkt H abwärts bis in die Lage Fig. X. gedreht sich denkt, wodurch der Winkel w, den das Prisma mit der Horizontal Linie Hh′ macht, durch o in den Winkel w′ = h′HH′ Fig. X. übergeht. Die Sekante und der Kosinus dieses Winkels, als Winkel des 4ten Kreis-Quadranten, oder weil diese zwey trigonometrischen Größen nicht durch o sondern durch den Radius = 1 den Uebergang machten, bleiben positiv; die Tangente und der Sinus jenes Winkels aber, als Winkel des 4ten Kreis-Quadranten, oder weil diese zwey Größen durch o gingen, werden negativ. Setzt man nun diese Werthe der trigonometrischen Größen in die Formeln für den ersten Fall: so ergeben sich jene für den zweyten Fall.

Die Auflösung dieses zweyten Falles findet sich durch die Formeln des ersten Falles Fig. IX. auch auf die Art, daß man das Prisma Fig. IX. um H von der rechten Seite nach der linken Fig. XI. gewendet sich denkt, und die Abscissen von h und c′ an gegen H′ zu rechnet. Für den Beschwerungspunkt c″ Fig.

XI. in dem Abstande $H'c'' = c - a = a$ Fig. IX. ist in den Formeln des ersten Falles Fig. IX. a und c - a gegeneinander auszuwechseln.

Die Formeln der Aufgabe VI., welche die drey besondern Fälle, daß das Prisma mit beyden Enden 1) unbeweglich, 2) frey aufliegt, und daß das Prisma 3) an einem Ende befestigt, am andern stützlosen aber mit einem Gewicht beschwert ist, in sich begreift, enthalten zugleich diejenigen der Aufgaben I., II. und III. Setzt man nämlich $w = o$: so erhält das Prisma eine horizontale Lage, und es ergeben sich die Formeln für diese angeführten Aufgaben, je nachdem mau für $tg\alpha$ und $tg\beta$ die ihnen entsprechenden Werthe setzt.

Analys

der gefundenen Kurve

für die zwey Fälle, daß das Prisma Fig. IX. und XI. mit beyden Enden unbeweglich und frey aufliegt.

Im ersten Falle ist $tg\alpha = o$ und $tg\beta = o$;

für H ist also das Krümmungsmoment

$$M' = \frac{a\,(c-a)^2}{c^2} \cos.w\,Q - 6 \cos.w.\,\frac{\sin.w}{c} E^2 = A' - B',$$

für c′ aber

$$M = \frac{2a^2\,(c-a)^2}{c^3} \cos.w\,Q + 6\,\frac{(c-2a)}{c^2} \cos.w.\sin.w\,E^2$$

$$= A + B \text{ und}$$

für H′

$$M'' = \frac{a^2(c-a)}{c^2} \cos.w\,Q + 6.\frac{\cos.w.}{c} \sin.w\,E^2 = A'' + B''.$$

Für den Beschwerungspunkt c'' Fig. XI. oder c' Fig. X. in dem Abstande H' c'' = c — a = a Fig. IX. ergeben sich die Momente M', M und M'' aus den obigen, wenn man in ihren Werthen a und c — a gegeneinander auswechselt.

Vergleicht man die drey ersten Momente miteinander, so findet man,

1) daß für a = oder > c — a, M' < M < M'' ist; denn für a = c — a sind die ersten Theile A' und A der Werthe von M' und M einander gleich, also A' — B' < A + B, für a > c — a aber ist A' < A, also um so mehr A' — B' < A + B, für beyde a betreffende Voraussetzungen mithin M' < M; ferner für a = c — a ist A = A'', B = o und B < B'', also A + B < A'' + B'', für a > c — a aber ist A < A'' und B < B'', also um so mehr A + B < A'' + B'', mithin für beyde a betreffende Voraussetzungen M < M''. Es wird also das Prisma für a = oder > c — a, wenn es bricht, zuerst in H' brechen,

2) daß für c — a > a, von c — a = a = $\frac{c}{2}$ an bis zu einer gewissen Grenze c — a > a noch M' < M < M'', jenseits dieser Grenze bis zu a = o aber M' > M > M'' ist. Innerhalb der ersten Entfernung wird das Prisma noch in H' zuerst, an der Grenze in H' und H zugleich und innerhalb der zweyten Entfernung allein in H zuerst brechen. Die erwähnte Grenze

wird durch die Gleichung $M' = M''$ also durch
$\frac{a}{c}(c-a)(c-2a)Q = 12 E^2 \sin. w.$ bestimmt.

Der Beweis, daß das Prisma an der Grenze bloß in H und H' und nicht zugleich in c' brechen könne, geht aus der Unmöglichkeit, daß $M' = M''$ und $M = M''$ ist, hervor; denn es ergäbe sich $a = \frac{c}{2}$, was unmöglich, weil in diesem Fall $A = A''$, $B = o$, $B < B''$ und $M < M''$ ist, wie bereits bewiesen wurde. Setzt man aber $M' = M$ und $M = M''$: so ergäbe sich gar keine Bestimmung für a.

Setzt man jedes der Momente M'' und M' gleich dem Brechungsmoment N: so folgt hieraus, daß

I) $Q = \frac{c. \sec. w. N - 6. \sin. w. E^2}{\frac{a^2}{c}(c-a)}$ das Brechungsgewicht für H' und

II) $Q = \frac{c. \sec. w. N + 6. \sin. w. E^2}{\frac{a}{c}(c-a)^2}$ das Brechungsgewicht für H ist.

Wird ein Gewicht Q in dem Abstande $a < c-a$ von H in einem disseits der angegebenen Grenze gelegenen Punkte c' angebracht: so ist Q, welches das Prisma in H zerbricht, größer als ein anderes Gewicht $Q_{\prime}$, welches in gleichem Abstande von H' in c'' angebracht das Prisma in H' zerbricht, wie dieß aus der ersten Gleichung I), deren Nenner im zweyten Fall

durch Verwechselung von a und c - a $\frac{a}{c}(c-a)^2$ wird, hervorgeht.

Wird aber ein Gewicht Q in dem Abstande $a < c - a$ von H in einem jenseits der Grenze gelegenen Punkte angebracht: so ist Q, welches das Prisma in H zerbricht, ebenfalls größer, als ein anderes Gewicht Q, welches in gleichem Abstande von H' das Prisma in H' zerbricht, wie dieß aus der Vergleichung der Gleichungen I) und II), deren letztern Nenner durch Verwechselung von a und c-a $\frac{a^2}{c}$ (c — a) wird, erhellet.

Durch Differenzirung der ersten Gleichung I) findet man ein Minimum des Brechungsgewichts Q für $a = \frac{2c}{3}$, und

durch diejenige der zweyten Gleichung II) ein Minimum des Brechungsgewichts Q für $a = \frac{c}{3}$ wenn $a = \frac{c}{3}$ noch jenseits der Grenze liegt.

Unter dieser Voraussetzung wird dennoch das erstere Minimum für den Bruch in H' kleiner als das zweyte für den Bruch in H seyn, weil der Zähler der ersten Gleichung kleiner als derjenige der zweyten Gleichung, und der Nenner der ersten Gleichung größer als derjenige der zweyten Gleichung ist.

Aus dieser bisherigen Analyse geht das für die Baukunst so neue als wichtige Resultat hervor, daß ein mit beyden Enden unbeweglich und schief aufliegendes Prisma in seiner obern Hälfte und etwas weiter herab bis zur Grenze viel weniger Tragkraft als in dem untern Theile; im dritten Theil der Länge, von oben angerechnet, aber seinen allerschwächsten Tragpunkt habe; weßwegen mit beyden Enden unbewegliche Balken, welche zu schiefen Ebenen, worauf man Lasten in Magazine und aus diesen bringt, oder zu andern Zwecken angewendet werden, mit ihrem Stammende nach oben und mit ihrem Zopfende nach unten gelegt, und im allerschwächsten Tragpunkt, wo möglich, nie beschwert werden sollen.

Im zweyten Falle (S. 80.), daß das Prisma mit beyden Enden frey aufliegt, ist das Krümmungsmoment für den Beschwerungspunkt

$$M = \frac{a}{c}(c-a)\cos. w. Q',$$

und das Prisma bricht begreiflich, wenn dieß geschieht, allein in diesem Punkt.

Setzt man dieses Moment gleich dem Brechungs-Moment N: so ergibt sich durch Differenziren ein Minimum des Gewichts Q für $a = \frac{c}{2}$, wie für ein horizontal liegendes Prisma.

In gleichem Abstande von H oder H' beschwert, bricht das Prisma mit demselben Gewicht, wie dieses auch für ein horizontal liegendes der Fall ist.

Anmerkung.

In den bisherigen Aufgaben ist die Elastizität des Prisma durchgängig gleich angenommen worden. Ist diese ungleich, wie bey einem aus Holz gebildeten Prisma der Fall ist: so ist die Größe E^2 keine beständige Größe mehr. Nimmt man für letzteres Prisma die einfache Voraussetzung an, daß die Elastizität am Stammende Fig. XII $= bB$ und am Gipfel oder unter dem Gipfel an einer bestimmten Stelle $= aA$, dazwischen aber der Unterschied dieser zwey Elastizitäten im geometrischen Verhältniß der Entfernung vom Stammende abnimmt: so wird, indem man $ab' = c$, $ac = a$, $bB = E^2$, $aA = e^2$, $am' = x$ setzt, $mM = e^2 + (E^2 - e^2)\frac{x}{c}$, und für $c'n = x'$ $nN = e^2 + (E^2 - e^2)\frac{(a+x)}{c}$. Setzt man $\frac{E^2 - e^2}{c} = D$, so wird für die Aufgaben I., II. und III.

$$(e^2 + Dx)\frac{d^2y}{dx} = -(c-a)\frac{x}{c}dxQ' + (a-x)dxq \text{ und}$$

$$[e^2 + D(a+x')]\frac{d^2y'}{dx'} = -\frac{a}{c}(c-a-x')dx'Q' + x'dx'q'.$$

Integrirt man diese Differenzialgleichungen: so wird man auf logarithmische Größen geführt, die mit $e^2 + D$ so verwebt sind, daß sich für die Anwendung im allgemeinen keine brauchbaren Resultate entwickeln lassen; daher ich, die weitere Ausführung des Kalkuls übergehend, mich bloß auf folgende wenige Bemerkungen beschränke.

Die vorgetragene auf durchgängig gleichmäßige Elastizität der Prismen gegründete Theorie kann mit Sicherheit auf Balken angewendet werden, wenn man die geringste dem Zopfende derselben zukommende Elastizität für die durchgängig gleichmäßige annimmt. Unter dieser Voraussetzung wird ein mit dem Zopfende in H und mit dem Stammende in H′ aufliegendes und beschwertes Prisma

a) weniger sich beugen, und

b) desselben Brechungsgewicht größer seyn, als die Theorie ausweist.

c) Die schwachsten Tragpunkte werden nicht mehr genau in den dritten Theil der Länge des Prisma auf beyden Seiten, sondern etwas mehr gegen H zu fallen.

d) Mehrere gekuppelte Balken, mit ihren Zopf- und Stammenden abwechseld übeinander gelegt, können nahe als durchgängig gleichelastisch angesehen werden.

Anwendung
theils
hier und theils in Eitelweins Statik der Säulen vorkommender Theoreme auf besondere Fälle.

I.

Zwey gleich lange Balken B und b Fig. XIII. von gleicher oder ungleicher Elastizität, von gleichem oder ungleichem Querschnitt werden mit beyden Enden ganz oder zum Theil unbeweglich oder ganz frey, horizontal oder schief übereinander aufgelegt, und dazwischen mit einem oder mehrern Gewichten beschwert. Wie groß wird diese Beschwerung seyn, wenn die zwey gekuppelten Balken um eine gegebene Tiefe sich senken?

Vergleicht man die Werthe der Ordinaten für die Kurven, welche die Prismen in den verschiedenen Fällen der Aufgabe I, II, III, IV und V annehmen: so erhellet, daß sie sich unter die allgemeine Form $y = \frac{C.Q + D}{E^2}$ bringen lassen, indem C und D von Q und E^2 ganz unabhängige Funktionen von x und andern unveränderlichen Größen bedeuten. Die Kurven, welche zwey gekuppelte Prismen von einem oder mehrern Gewichten erhalten, sind demnach durchgehends einander parallel oder ähnlich, oder die Prismen bleiben gekrümmt

in durchgängiger Berührung, wenn die Ordinaten mM = y und m′M′=Y der zwey Prismen für eine und dieselbe Abscisse einander gleich sind, d. i y = Y oder $\frac{C.Q+D}{E^2} = \frac{C.'Q+D}{'E^2}$ nämlich $\frac{Q}{E^2} = \frac{'Q}{'E^2}$ ist. Hieraus folgt, daß $Q+'Q=\frac{(E^2+'E^2)Q}{E^2}=\Sigma Q$ die Beschwerung der zwey übereinander liegenden Balken ist. Von dieser Beschwerung trägt also der Balken B den Theil $Q = \frac{E^2.\ \Sigma Q}{E^2+'E^2}$ und der andere b den Theil $'Q = \frac{'E^2.\ \Sigma Q.}{E^2+'E^2}$ Sind die Querschnitte und die Elastizitäten von zwey belasteten Balken gegeben: so kann man nun genau die Gewichtsquoten angeben, welche jeder derselben zu tragen hat.

Auf ähnliche Art findet man die Beschwerung für 3 . . . n gekuppelte Balken.

II.

Ein Balken, der mit beyden Enden Fig. XIV. und XV. unbeweglich oder frey aufliegt, wird, im letzten Falle mit Anwendung zweyer Hypomochlions über den beyden Enden, in c′ durch die Kraft K aufwärts gekrümmt, und in dieser Krümmung durch eine Stütze oder zwey Streben erhalten. Wie groß wird der vertikale Druck auf diese Unterstützung in c′ seyn?

Dieser Druck ist = K und K gleich dem Gewicht, welches dem Balken die nämliche Krümmung abwärts zu geben vermag.

III.

Zwischen H und H′ der eingemauerten Ende Fig. XVI. und XVII. befindet sich in h′ eine Stütze und in c′ das Gewicht. Welchen lothrechten Druck erleiden die Punkte H und h′?

Liegt die Stütze in h′ mit HH′ in einer Horizontallinie; so berechne man Q′, q und q′ des in H und h′ unbeweglich angenommenen, mit Q beschwerten Prisma nach der gelehrten Weise. Der Druck des Gewichts Q′ auf die Punkte H und h′ ist der Ordnung nach $\frac{c\,h.'}{h'H}\,Q'$ und $\frac{c\,H.}{h'H}\,Q'$, und der Druck der Gewichte q und q′ auf die eingemauerten Ende findet sich mittels folgender Betrachtungen. Würde bloß der Punkt H′ festgehalten: so wäre, gemäß der Gleichung $c\,h.'\,q' = h'H.'\,p$, der Druck des obern Mauerwerks auf H′ wenigstens $p = \frac{c\,h'.}{h'H'}\,q'$. Da aber alle Punkte des Endes $H'.H'' = l$ vom Mauerwerk eingeschlossen sind: so nehme man an, der Druck des obern Gemäuers auf jeden Punkt des Endes H′ H″ sey gleich, und $mH' = x$. Es ist folglich $c\,h'.\,q' = S\,(h'\,H' + x)\,dx.\,p$ $= \left(h'H'\,x + \frac{x^2}{2}\right)p = \left(h'\,H.\,l + \frac{l^2}{2}\right)p$ und der Druck des obern Gemäuers auf H′ H″ wenigstens $= l\,p = \frac{c\,h'.\,q'}{h'H' + \frac{l}{2}}$. Auf ähnliche Art findet sich

$c H. q = \frac{l^2 p}{2}$ *) und der Druck des obern Gemäuers auf $H H'' = l$ wenigstens $= l p = \frac{2. c H. q}{l}$. Der Druck auf h′ ist also von Seite des Gewichts q′ und des obern Gemäuers $= q' + \frac{c h'. q'}{h'H' + \frac{l}{2}}$ und der Druck

) Nähme man an, das End H H″ Fig. XVI könne um den sehr kleinen Winkel H″ H H″ gegen das obere Gemäuer sich erheben, und der Gegendruck dieses Gemäuers auf jeden Punkt des Endes verhalte sich wie die Höhe, zu der sich jeder Punkt an das Gemäuer andrückt: so wäre, indem p dessen Gegendruck in H″ bezeichnet, a) . . $c H. q = S x. \frac{x d x p}{l}$ $= \frac{x^3}{3 l} p = \frac{l^2}{3} p$.
Verhielte sich aber der Gegendruck auf jeden Punkt n des Endes umgekehrt wie seine Entfernung n H von H: so wäre, indem p den Gegendruck in H″ bezeichnet, b) . . $c H. q = S x. \frac{l}{x} d x. p = x l p = l^2 p$.
In der Voraussetzung des gleichmäßigen Druckes des obern Gemäuers auf jeden Punkt des Endes fand man c) . . $c H. q = \frac{l^2}{2} p$.
Nimmt man nun von den Werthen p und p der Gleichungen a) und b) den mitilern: so erhält man $\frac{(3 + 1) c H.}{2 \quad l^2} q = \frac{2. c H.}{l^2} q$, genau den Werth von p der Gleichung c). Dieser nämliche Werth ergibt sich auch, wenn man von den drey Werthen der Gleichungen a), b) und c) den mittlern nimmt.

auf H von Seite des Gewichts q und des obern Gemäuers wenigstens $= q + \frac{2. c\,H.\,q}{l}$, also der ganze Druck auf H wenigstens $= \frac{c\,h'\,Q'}{h'\,H} = (l + 2.\,c\,H)\frac{q}{l}$ und der ganze Druck auf $h' = \frac{c\,H.\,Q'}{h'H} + \frac{(l+2.\,cH)\,q'}{(l+2.\,h'H')}$.

Käme aber h' auf irgend eine Art unter die Horizontallinie H H' zu liegen: so bestimme man nach demjenigen Theil 'Q des Gewichts Q, welcher das Prisma in h bis zur Tiefe h h' zu beugen vermag, den Druck auf H, und nach dem Rest Q — 'Q den Druck auf H und h'.

IV.

Unter welchem Winkel widersteht eine Strebe von möglich geringster Masse einer Last?

In der Voraussetzung, daß die Strebe von elastischer und prismatischer Beschaffenheit ist, verhalten sich die Steifigkeiten oder Widerstände zwey solcher Streben S' und S von gleicher Elastizität wie die Produkte aus der Breite in den Kubus der Dicke oder Höhe getheilt durch das Quadrat der Länge. Setzt man die Winkel der Streben S' und S mit der Horizontallinie = t und θ Fig. XVIII., die Last in c = P, das Verhältniß der Breite zur Dicke beyder Streben $= 1 : \sqrt{2}$ oder allgemein = 1 : m, c H = c, c' H = c', die Breite der Strebe S' = b, ihre Länge = l, die Breite der Strebe S = β, ihre Länge = λ: so ist l = c. sec. t

die Länge der Strebe S′ und $\lambda = c.\ sec.\ \theta$ diejenige der Strebe S in den Lagen c b′ und cb; der Druck der Last P in c nach der Richtung der Strebe S′ $= P.\ cosec.\ t$ und nach derjenigen der Strebe S $= P.cosec.\ \theta$. Die Steifigkeit der Strebe S′ verhält sich demnach zu jener der Strebe S wie $P.cosec.t : P.cosec.\theta$ $= \frac{m\,b^4}{c.^2\ sec.^2\ t} : \frac{m\,\beta^4}{c.^2 sec.^2\ \theta}$. Die Masse der Strebe S ist $M = m.\ \beta.^2\ c.\ sec.\ \theta$. Setzt man den Werth von β^2 aus der vorhergehenden Proportion in diese Gleichung: so erhält, man $M = m\,c\,b^2 \frac{sec.^2\theta}{sec.\ t} \sqrt{\frac{cosec.\theta}{cosec.\ t}}$.

Betrachtet man aber die beyden Streben in den Lagen c′ b′ und c′ b: so ergibt sich der Druck der Last P in c nach der Richtung der Strebe $S' = \frac{c}{c'} P\,sec.\ t$ und nach derjenigen der Strebe $S = \frac{c}{c'}\ P\ sec.\ \theta$; die Masse der Strebe S wird hiemit, wenn b′ die Breite der Strebe S′ ist, $M = m\,c'\,b'^2\ \frac{sec.^2\theta}{sec.\ t} \sqrt{\frac{cosec.\theta}{cosec.t}}$.

Nun ist die Masse der Strebe S in beyden Lagen ein Minimum, wenn $sec.^2\theta \sqrt{cosec.\ \theta} = \frac{1}{(1 - sin.^2\theta)\sqrt{sin\theta}}$ ein solches ist.

Setzt man das Differenzial dieser Größe $= 0$: so erhält man $sin.\theta = \sqrt{\tfrac{1}{5}} = 0,4472.. = sin: 26^\circ\ 34'$, welches die Größe M zu einem Minimum macht.

Die möglich geringste Masse der Strebe findet also bey dem Winkel von 26° 34′ Statt.

Fulda berechnete in seiner Theorie der Dächer den Winkel θ für die möglich-geringste Stärke der Strebe $= m\beta^2$ zu 35° 16′. Die Strebe muß aber bey diesem Winkel länger als bey dem Winkel von 26° 34′ seyn.

Gewöhnlich erhalten die Streben den Winkel von 45°. Unter diesem Winkel erleiden sie zwar den möglich geringsten Druck von der zu stützenden Last; allein sie erfordern eine größere Stärke und Länge, als unter den Winkeln von 35° 16′ und 26° 34′.

Es wird hier noch bemerkt, daß der Winkel von 26° 34′ vor den 2 andern Winkeln neben dem Vorzuge der größten Holzersparniß auch noch desjenigen sich erfreue, zu Häng- und Sprengwerken in mehrern Beziehungen geeigneter zu seyn.

V.

Bey welcher Anordnung werden die geraden oder elastisch gekrümmten Theile sc, cc′ und c′s′ eines belasteten Spreng- oder Hängwerkes Fig. XIX. und XX. einen dem Druck in c und c′ entsprechen gleichen Widerstand leisten? Es sey der Winkel, den cs mit der Horizontallinie macht, $= \theta$, $Hc = H'c' = x$, $HH' = c$ also $cc' = c - 2x$. Bedient man sich der in Eitelweins Theorie der Säulen vorkommenden For-

mul $Q = \frac{\pi^2 E^2}{a^2}$, wo Q den Druck nach der Richtung cs und c′s′, π die Ludolfine und a die Linie cs anzeigt: so erhält man, durch Substituirung $a = \frac{x}{\cos\theta}$, $Q = \frac{\pi^2}{x^2} \cos^2\theta\, E^2$. Auf ähnliche Art erhält man für das Mittelstück cc′ $'Q = \frac{\pi^2}{(c-2x)^2} E^2$. Da $Q = 'Q$ seyn soll: so muß $x = \frac{c.\cos\theta}{1 + 2\cos\theta}$ seyn, von welchem Werth der von Eitelwein am Ende des II. Bds. für diesen Fall berechnete, nur der Form nach verschieden ist.

Dieser Werth von x ist, solange $\theta < 90°$, kleiner als $\frac{c}{3}$; für $\theta = 26° \; 34'$, welcher Winkel der möglich größten Holzersparniß entspricht, ist $x = 0,\, 320..\, c$, und für $\theta = 30°$ ist $x = 0,\, 316..\, c$.

VI.

Ein einen Kreisbogen von wenigen Graden bildendes Prisma A B Fig. XXI. werde in der Richtung AB von einem Gewicht P gedrückt. In welche Kurve wird sich dasselbe verändern?

Für die neue Kurve AMB sey $AP = x$, $PM = y$ und das beständige Moment, welches der Krümmung in M sowohl als in jedem andern Punkt zugehört,

$= l. q$; so ist $l. q + y. P$ das Moment für den Punkt M. Es ist also $E^2 \frac{d^2y}{dx} = -(l. q + y. P)\, dx$.

Behandelt man diese Gleichung auf die geeignete Art, und bringt sie auf die Form $dx = \frac{E\, dy}{\sqrt{(A^2 - y^2 P)}}$; so findet man $\sin.(\text{arc} = \frac{x \sqrt{P}}{E}) \sqrt{} = \frac{2\, y\, P}{(l.^2 q^2 + 4 \cot^2 \alpha E^2 P)}$ und $\frac{a}{E} \sqrt{Q'} = \pi$, indem $\alpha =$ dem Winkel der Tangente in B mit der auf die Linie $AB = a$ perpendikulären und $\pi =$ der Ludolfine ist.

VII.

Ein nach der Richtung der Länge gebeugtes Prisma hat mit einem kreisförmig gekrümmten gleiche Sehne und in deren Mitte gleiche Ordinate. Welcher Unterschied hat zwischen den Winkeln β' und β, welche die Tangenten an jedem Ende der zwey Prismen mit der Sehne machen, und bey Gleichheit dieser zwey Winkel zwischen den Ordinaten in der Mitte der beyden Prismen gemeinschaftlichen Sehne Statt?

In der Voraussetzung, daß die Krümmung beyder Prismen nur gering und das erstere hievon zwischen seinen Enden ohne Inflexionspunkt, ferner $a =$ der Sehne, u' und $u =$ den Ordinaten in der Mitte, und $\pi =$ der Ludolfine ist, gehört $u' = \frac{a}{\pi} tg.\, \beta'$ dem elastisch gekrümmten Prisma, und $u = \frac{a}{2}\, tg.\, \frac{\beta}{2}$ dem

kreisförmig gekrümmten. Für $u' = u$ ist $\frac{tg.\beta'}{1{,}57..} = tg.\frac{\beta}{2}$ also $\beta' > \beta$, und der Unterschied beyder Winkel nimmt mit den Winkeln β' und β zu. Für $\beta' = \beta$ ist $u' > u$; weil $tg.\beta = \frac{tg.\frac{\beta}{2}}{1-tg.^2\frac{\beta}{2}}$ also $u' = \frac{2a}{\pi}.\frac{tg.\frac{\beta}{2}}{1-tg.^2\frac{\beta}{2}}$ und $u = \frac{a}{2}\ tg.\frac{\beta}{2}$, und, da die Krümmung der Prismen, also auch $\frac{\beta}{2}$ nur gering angenommen wurde, u' nahe $= \frac{2a.}{\pi} tg.\frac{\beta}{2}$ und $u = \frac{a}{2} tg.\frac{\beta}{2}$, folglich $\pi.u' = 4.u$, und $u' > u$; diese Verschiedenheit findet um so mehr Statt, wenn $1 - tg^2.\frac{\beta}{2}$ nicht $= 1$ sondern $= \frac{m}{n}$, $m < n$ gesetzt wird; denn es wird alsdann $\pi\, m.u' = 4n.u$, also, da $\pi < 4$ und $m < n$, um so mehr $u' > u$.

Diese Vergleichungen lehren uns, daß Balken über einen kreisförmigen Lehrbogen gekrümmt bey dessen Hinwegnahme in der Nähe der Widerlagen sich senken und in der Mitte steigen, oder wenigst eine von diesen zwey Veränderungen erleiden müssen. Erscheinungen der Art ergaben sich bey Ausrüstung der vom geheimen Rath Ritter von Wiebeking bisher erbauten Bogenbrücken, woran allerdings auch der Einfluß technischer Gründe Antheil hat.

Anhang
anderer
statischer Untersuchungen.

I.

Ein steinernes, gleichdickes Halbzirkel-Gewölb mit einem durchgängig gleichstarken Fugenverbande auf der Basis hh′ Fig. XXII. ist irgendwo in c mit einem Gewichte P beschwert. In welcher Stelle muß dieses angebracht seyn, um das Gewölb am leichtesten zu zerbrechen?

Der innere Halbmesser des Gewölbes sey $= r$ der Gradbogen $hmc = \varphi$, der andere $ch' = \psi$: so ist der Winkel $h'cd = 90 - \frac{\varphi}{2}$ und $hcd = 90 - \frac{\psi}{2}$, der Druck des Gewichs P nach der Richtung ch, $= P. \cos. \frac{\varphi}{2}$ und nach $ch' = P. \cos. \frac{\psi}{2}$, der Hebelsarm $m'n = r\,(1 - \cos. \frac{\varphi}{2})$ und der andere $m''n' = r\,(1 - \cos. \frac{\psi}{2})$, also $rP\,(\cos. \frac{\varphi}{2} - \cos.^2 \frac{\varphi}{2})$ das Moment, um den Bogen ch in m′ auswärts zu drucken,

und $rP(\cos.\frac{\psi}{2} - \cos.^2\frac{\psi}{2})$ das Moment, um den Bogen ch′ in m″ auswärts zu drücken. Setzt man unbestimmt das Differenzial eines dieser der Form nach gleichen Momente oder $d. rP(\cos.\frac{w}{2} - \cos.^2\frac{w}{2}) = o$: so erhält man $\cos. w = \frac{1}{2} = \cos. 60°$, also $w = 120°$. Es ist mithin $w = \varphi = 120°$ und das Moment $rP(\cos.\frac{\varphi}{2} - \cos.^2\frac{\varphi}{2}) = 0,25. rP > rP(\cos.\frac{\psi}{2} - \cos.^2\frac{\psi}{2}) = 0,20. rP$ ein Maximum.

Das Gewölb hat demnach im 30ten Grade von der Mitte oder im 60ten von unten an d. i. im dritten Theile seines Halbkreises auf beyden Seiten seine zwey schwächsten Tragpunkte.

Ein mit beyden Enden befestigtes Prisma von durchgängig gleicher Elastizität hat, wie erwiesen wurde, im dritten Theile seiner Länge auf beyden Seiten seine zwey schwächsten Tragpunkte — eine Analogie, welche mir hier bemerkungswerth schien.

Bemerkung. Ein ähnliches Gewölb von weniger als einem Halbkreise hat gar keinen schwächsten Tragpunkt.

II.

Sollen Brückenlagen nicht nur keine Umdrehung sondern auch keine Verschiebung auf ihrer Basis erleiden: so dünkt mir in letzter Rücksicht eine geneigte

Lage ihrer Basis dienlicher zu seyn, als eine horizontale, welche man den Widerlagern allgemein zu geben pflegt. Konstruirt man noch dazu die Widerlager in geneigten Schichten — eine Methode, welcher eine geneigte Lage ihrer Basis besser entspricht, als eine horizontale —: so reicht eine geringere Stärke hin, ein Wiederlager gegen das Verschieben zu bewahren, und die Oekonomie der Baumaterialien gewinnt dabey nicht unbedeutend. In statischer und ökonomischer Beziehung müßte demnach ein Brücken-Widerlager ungefähr die Form Fig. XXIII. haben. Die geringste Stärke, welche solches gegen die Verschiebung und Umdrehung zugleich sichert, kann durch folgende Berechnungen gefunden werden.

Es sey c′ der Schwerpunkt des Widerlagers ABCD, $c'n' = cn = V$ dessen Vertikaldruck, c″ der Mittelpunkt des Vertikaldruckes der halben Brücke innerhalb dem Widerlager, $c''n'' = ng = V'$ deren Vertikaldruck, c der Mittelpunkt des Vertikaldruckes des Widerlagers und der halben Brücke, $cg = V + V'$ der Vertikaldruck dieser beyden zusammen, $cb = H$ der Horizontaldruck der Brücke, $iDc = w$ der Neigungswinkel der Basis und $BDi = v$ der Böschungswinkel des Strebepfeilers BDk, d die Dicke, $Bk = h$ die Höhe, $BA = b$ die Stärke und g die specifische Schwere des Widerlagers, m der Reibungs-Divisor, $Do = l$, $Dl = s$, $mD = bk = h'$: so ist $\frac{cf}{m} (= V + V') \frac{\cos. w}{m}$

der Reibungs-Widerstand des Widerlagers längs CD von D gegen C; wozu noch der Reibungs-Widerstand $\frac{ce}{m} = H. \frac{cos. w}{m}$ von Seite des Horizontaldruckes und das Bestreben des Widerlagers, auf der schiefen Ebene von c gegen d zu glitschen, nämlich $cd = (V + V') \sin. w$ zu setzen ist, um den Total-Widerstand des Widerlagers von D gegen C d. i. $(V + V') \sin. w + (V + V' + H) \frac{cos. w}{m}$ zu erhalten. Das Bestreben des Horizontaldruckes cb, das Widerlager auf ihrer Basis in der Richtung von c nach b zu schieben ist $= H. cos. w$. Es ergibt sich also für den Zustand des Gleichgewichts zwischen Kraft und Widerstand oder für die Unverschiebbarkeit die Bedingungs-Gleichung

$$(V + V') \sin. w + (V + V' + H) \frac{cos. w}{m} = H. \cos. w.$$

Ferner ist für den Zustand der Undrehbarkeit $s. (V + V') = [\frac{h.^3}{3} cot.^2 v + (h. cot. v + \frac{b}{2}) h. b + (h. cot. v + b)^2 \frac{tg. w}{3}] d. g + l. V' = h' H$ die Bedingungs-Gleichung.

Die Schwere des Widerlagers oder V ist $= [h. b + \frac{h^2}{2} cot. v + (b + h. cot. v)^2 \frac{tg. w}{2}] d. g.$

Setzt man diesen Werth von V in die beyden Bedingungsgleichungen: so kann man hieraus die zwey unbekannten Größen w und b mittels des gegebenen Böschungswinkels v des Strebepfeilers und der übrigen gegebenen Größen finden.

III.

Bey denjenigen Rammmaschinen, deren Klotz mittels mehrerer divergirender mit dem Rammtau verbundener Stricke von eben so vielen Menschen erhoben wird, geht für die beabsichtigte Wirkung ein gewisser Theil der Zugkraft verloren. Nach einer Berechnung, wobey der Rammklotz zu 12 baier. Zentnern, die Anzahl der möglichst gedrängt gestellten Arbeiter zu 60, die Länge der Stricke zu 18 Schuh angenommen wurde, beträgt der Verlurst schon einen Kraftaufwand von 5½ Arbeitern. Dieser Nachtheil könnte durch Anwendung eines an das Rammthau horizontal aufgehangenen in Fig. XXVIII. dargestellten eisernen Ringes, an und in dessen ~~Mitte~~ Umfang die Zugstricke vertikal gezogen werden können, vermieden werden. Da aber hierbey die Schwere des Ringes, welche höchstens etwa auf 20 Pf. = der Zugkraft eines Arbeiters zu veranschlagen wäre, die Geschwindigkeit und Wirkung des fallenden Klotzes minderte: so betrüge die reine Kraftersparniß bey dieser vorgeschlagenen Vorrichtung nur mehr den Kraftaufwand von wenigstens 4½ Personen, ein Gewinn, welcher bey der gewöhnlich langen Dauer des Rammens zu Brücken-, Schleusen- und andern Bauten im Ganzen dennoch von Bedeutung ist.

IV.

Mechanik und Konstruktion der Rasten.

Die Aufgabe der Rasten besteht bekanntlich in zwey Punkten:

a) Die bergauf gehenden Fuhrwerke, während der Ruhe der Zugkräfte, gegen die Rückgängigkeit zu sichern, und

b) die Bewegung der bergab gleitenden zu mässigen.

Soll nun in beyden Fällen der Bewegung ein Fuhrwerk beym Eintritt in eine Rast nicht zu sehr erschüttert werden, so dürfen die Rasten nicht zu tief seyn. Gestattete die Form und Tiefe einer Rast die Berührung und das Eintauchen der Räder bis zur Höhe ihrer Achsen, so würde zwar der doppelte Zweck der Aufgabe von der Rast erfüllt, dabey aber der Bedingung, die Fuhrwerke nicht zu sehr zu erschüttern, wenig entsprochen. Es frägt sich demnach:

Welche Konstruktion der Rasten dieser Bedingung die entsprechendste ist?

ad a)

1) Der senkrechte Druck $cs = \frac{Q}{4}$ (Fig. XXIV.) eines Rades C von einem Q. schweren Wagen in der Rast zerlegt sich in zwey Theile c m, rechtwinklicht auf die Tangente des Stützpunktes n, und c d, parallel mit der Tangente h n des andern Stützpunktes h. Mit c d strebt das Rad aus der Rast zu sinken, während es mit c m in dieser zurückgehalten wird. Das außer der Rast befindliche Rad C′ oder C″ schiebt mit der Kraft c′ c‴ das Rad in der Richtung c′ c‴. Diese Kraft c′ c‴ in c zerfällt in zwey andere Kräfte nach

den Richtungen c d und c g. Die Gesammtkraft nach c d wirkt an dem Hebelsarme c h, und die Gesamtkraft nach c m an dem Hebelsarme h b. Soll das Rad C und hiemit der ganze Wagen in Ruhe bleiben: so muß das eine Moment gleich dem andern oder wenigstens das erste kleiner als das zweyte seyn.

Da der Winkel, den c e mit ML so wie mit c c'' macht, und welcher eine Funktion der Wagenlänge, der Tiefe der Rast und des Unterschiedes der Höhen des Vorder- und Hinterrades ist, als immer sehr klein außer Acht gelassen, folglich die Richtung c c'' für die Richtung c e angenommen werden kann: so ist, wenn der Winkel $h c m = \varphi$, $M h N = M L N = \alpha$, $c h = A$, $c d = p$, $c m = q$, $c' c''' = r$, $c g = d c'' = q'$, $h b = s$,

$$c d : c s = p : \frac{Q}{4} = \sin.\alpha : \cos.\varphi \text{ und } p = \frac{Q.\sin.\alpha}{4 \cos.\varphi}$$

$$c'c''' : c's' = r : \frac{Q}{4} = \sin.\alpha : 1 \quad . \ . \ r = \frac{Q.\sin.\alpha}{4}$$

$$c d : c'c''' = p : r = 1 : \cos.\varphi \ . \ . \ p = \frac{Q.\sin.\alpha}{4 \cos.\varphi}$$

$$c m : c s = q : \frac{Q}{4} = \cos(\varphi-\alpha) \cos.\varphi \ . \ . \ q = \frac{Q.\cos.(\varphi-\alpha)}{4 \cos.\varphi}$$

$$c g : c'c'' = q' : r = \sin.\varphi : \cos.\varphi \ . \ . \ q' = \frac{Q.\sin.\alpha \sin.\varphi}{4 \cos.\varphi}$$

$$h b : h c = s : A = \sin.\varphi : 1 \ . \ . \ . \ . \ . \ s = A.\sin.\varphi$$

Da (p+p) c h $\overset{=}{<}$ (q+q′) hb seyn soll, so ist

$$\frac{Q.\sin.\alpha.A}{2.\cos.\varphi} \overset{=}{<} \frac{Q[\cos(\varphi-\alpha)+\sin.\alpha.\sin.\varphi].\sin.\varphi.A}{4\cos.\varphi} \ldots (I)$$

und nach geschehener Reduction

$$2.\sin\alpha \overset{=}{<} \cos(\varphi-\alpha)\sin.\varphi + \sin.\alpha\sin.^2\varphi \ldots (II)$$

Bringt man die Reibung der Achsen in Anschlag, so widersetzt sich diese der Drehung des Hebels ch um den Punkt h. Der Druck auf die Achse c, in der Richtung cm, beträgt q+q′+q″, also die Reibung $\frac{q+q'+q''}{m}$ und das Reibungsmoment $\frac{q+q'+q''.\ a}{m}$, wenn q″ den Druck c′ n′ $= Q.\frac{\cos.\alpha}{4}$ und a den Radius der Achsen bedeutet. Addirt man den Werth dieses Moments zu dem rechtseitigen Vergleichungsglied in (I): so ist nach vorgängiger Reduction

$$2\sin.\alpha.A \overset{=}{<} [\cos.(\varphi-\alpha)+\sin.\varphi.\sin.\alpha].$$

$$(\sin.\varphi.A+\frac{a}{m})+\cos.\varphi.\cos.\alpha.\frac{a}{m} \ldots (III).$$

2) Aus angestellter Berechnung, wobey A = 2, a = 0, 14 und mit Gerstner m = 8 angenommen wurde, ergab sich, daß das linkseitige der 2. Ver-

gleichungsglieder in (II) sowohl als in (III) stets kleiner als das rechtseitige, so lange $\varphi = 45°$ und α höchstens 26°, also die Steigung 3. Fuß auf die Klafter beträgt. Für den äußersten Fall, der kaum oder selten vorkommen wird, daß $\alpha = 45°$ und die Steigung 6 Fuß auf die Klafter ist, erfordert die Bedingung, daß das linkseitige der oben bezeichneten Glieder gleich dem rechtseitigen, einen Winkel φ von 60°. Auf Straßen von einer 3 bis 6 schuhigen Steigung müßte also zum Behuf der Bedingung, daß das linkseitige jener Glieder gleich dem rechtseitigen oder kleiner als dieses, der Winkel φ bis zu 60° vergrößert werden.

ad b)

1) Es sey $cc'' = C$ (Fig. XXV.) die Geschwindigkeit in der Sekunde, womit ein Wagen in der Richtung cc'' in die Rast hmi eintritt,

ca die Richtung und Größe des Stoßes, den die Achse c von dem Eckpunkte h leidet,

$cd = T$ die Größe des aus cc'' und ca zusammengesetzten Schubes, parallel mit der Tangente des Radpunktes h,

$cg = P$ die Geschwindigkeit in der Sekunde, womit der Wagen außerhalb der Rast seine mit hl parallele Bewegung fortsetzt, und wie in Fig. XXIV.

hcn $= \varphi$ sowie

MhN $= \alpha$:

so ist C : T $= 1 : \cos.\varphi$, also T $=$ C. $\cos.\varphi$,
T : P $= 1 : \cos.\varphi$, . . P $=$ T. $\cos.\varphi$
$=$ C. $\cos.^2\varphi$ die Geschwindigkeit, womit der Wagen aus der Rast sich bewegt.

Anmerkung 1. Sollte die Geschwindigkeit P gänzlich annullirt werden, so müßte, wie leicht von selbst zu begreifen, $\varphi = 90°$ seyn. In diesem Fall ginge die Reaction des Punktes h in der Richtung cc′ durch die Achse.

Anmerkung 2. Sollte aber die Geschwindigkeit T gänzlich dadurch annullirt werden, daß der Wagen über eine h tangirende schiefe Ebene oder Kurve gegen c″ zu mit abnehmender Geschwindigkeit aufwärts laufen könnte: so müßte die verticale Höhe s′ dieser Vorrichtung $=$ s $+$ s. cot $(\varphi - \alpha)$.
$$tg.\alpha\cos.\varphi = \frac{C^2.\cos.^2\varphi}{4g}(1 + \cot(\varphi - \alpha)\, tg.\alpha.\cos.\varphi)$$
seyn, weil das Hinterrad des Wagens während der Zeit, daß das Vorderrad von h aus die schiefe Ebene oder die Kurve hinanläuft, von k um eine Strecke abwärts gleitet und so der Bewegung des Vorderrads aufwärts neue Kraft gibt. Die diesem Zuwachs entsprechende Höhe (s′—s) ist jedoch, wenn φ nicht viel unter 60° und α geringer als der Winkel einer 24 zolligen Steigung, im

Verhältniß zu der Höhe s unbedeutend genug, das $s' = s = \frac{C^2.\cos.^2\varphi}{4g}$ gesetzt werden kann.

Diese Methode, den Wagen zur Ruhe zu bringen, ist jedoch, aus Rücksichten beym Bergauffahren, nicht zu empfehlen.

Bey Fortbewegung des Vorderrads wird auch das Hinterrad c′ in die Rast eintreten und zwar in dem Augenblick als das Vorderrad die Straße in l berührt. Dieser Eintritt wird mit einem Stoß begleitet seyn, welcher die während der Bewegung des Wagens von k bis n um c vermehrte Geschwindigkeit wieder vermindert. Es ist demnach

$P' = \sqrt{P^2 + c^2}.\cos.^2\varphi$ die Austrittsgeschwindigkeit des Hineerrades aus der Rast.

Wird, wie in Praxis füglich geschehen kann, der geringe Zuwachs c außer Rechnung gelassen, so wird

$P' = P.\cos^2\varphi = C.\cos^4\varphi.$

2) Würde in gleicher Entfernung von h, als i von M eine zweyte und gleiche Rast, wie die erste, vom Wagen passirt: so wäre

$P'' = \sqrt{(P'^2 + P^2)}\cos.^2\varphi = C.\cos.^2\varphi.\sqrt{(1 + \cos^8.\varphi)}$ die Austritts-Geschwindigkeit des Vorderrades aus der zweyten Rast und

$P''' = P''.\cos.^2\varphi = \sqrt{(P'^2 + P^2)}\cos.^4\varphi$

$= C.\cos.^4\varphi.\sqrt{(1+\cos.^8\varphi)}$ die Austrittsgeschwindigkeit des Hinterrades aus der zweyten Rast.

Anmerkung. Die Vergleichung zwischen P''' und P' gibt das Resultat, daß $P''':P'=\sqrt{(1+\cos.^8\varphi)}:1$ $=1:1$ beynahe, wenn φ nicht viel unter 60° ist, unter welchen Umständen die Austrittsgeschindigkeit des Wagens aus der ersten Rast sehr gering ist und die während dem Laufe desselben nach der zweyten Rast neu erzeugte Geschwindigkeit C nur sehr wenig vermehren kann. Hieraus erhellet zugleich, daß es nicht Noth thue, die zweyte Rast der ersten näher zu legen, um die zweyte Austrittsgeschwindigkeit P''' gleich der ersten P' zu machen.

3) Nun wollen wir untersuchen, welche Resultate für P' dieser Kalkul für die Variationen von C gibt.

Folgende Tabelle enthält hierüber Ausschluß.

$C = 2'$	$\varphi = 30°$	$P' = 1{,}2'$	$\varphi = 45°$	$P' = 0{,}5'$	$\varphi = 60°$	$P' = 0{,}1'$
$C = 4'$		$P' = 2{,}3'$		$P' = 1{,}0'$		$P' = 0{,}3'$
$C = 12'$		$P' = 6{,}8'$		$P' = 3{,}0'$		$P' = 0{,}8'$
$C = 32'$		$P' = 18{,}0'$		$P' = 8{,}0'$		$P' = 2{,}0'$

Anmerkung 1. Legt ein Wagen 12 Stunden in 12 Stunden zurück, so ist seine Geschwindigkeit in der Sekunde 3,3 Schuh. Diese diene als Maaßstab zur Würdigung der Geschwindigkeiten C.

Anmerkung 2. Die letzte Geschwindigkeit von 32′ erlangte ein frey, ohne Widerstand des Weges, des Wagens und des Zugviehes, herabgleitender Wagen, wenn er auf Straßen je von $4\frac{1}{2}$, 9, 18, 36 oder 72 zolliger Steigung 240, 120, 60, 30 oder 15 Schuh zurückgelegt hätte.

Wir sehen aus dieser Tabelle, daß, wenn ein Wagen keine zu große Austritts-Geschwindigkeit erlangen, aber dennoch so viel Vermögen, um ohne Hilfe des Zugviehes sich selbst aus der Rast zu heben, behalten soll, der Winkel φ nicht wohl unter 45° und nicht über 60° seyn dürfe.

4) Würden zwey Rasten unmittelbar hintereinander gelegt, welche Kuppelung eine Rast zweyter Art heißen soll, so ist

$\mathfrak{P} = C. \cos.^2\psi$ die Austrittsgeschwindigkeit des Vorderrads aus der ersten Rast, und

$\mathfrak{P}' = \mathfrak{P}.\cos.^2\psi = C. \cos.^4\psi$ die Austrittsgeschwindigkeit des Hinterrades aus der ersten Rast; so wie

$\mathfrak{P}'' = \mathfrak{P}'. \cos.^2\psi = C. \cos.^6\psi$ die Austrittsgeschwindigkeit des Vorderrades aus der zweiten Rast, und

$\mathfrak{P}''' = \mathfrak{P}''. \cos.^2\psi = C. \cos.^8\psi$ die Austrittsgeschwindigkeit des Hinterrades aus der zweyten Rast.

Anmerkung. Wird in der letzten Formel (2) die Entfernung der zweyten Rast, also auch P gleich o gesetzt: so wird, für $\varphi = \psi$, $P''' = P'.\cos.^4\psi = C.\cos.^8\psi$ gleich dem obigen Werth von $\mathfrak{P}'''$.

5) Wenden wir diesen Kalkul der Rasten zweyter Art auf einige Fälle der Geschwindigkeit C an: so sind die Resultate die in folgender Tabelle angezeigten.

$C = 2'$	$\varphi = 15°$	$\mathfrak{P}''' = 1{,}5'$	$\varphi = 30°$	$\mathfrak{P}''' = 0{,}6'$	$\varphi = 45°$	$\mathfrak{P}''' = 0{,}1'$
$C = 4'$		$\mathfrak{P}''' = 3{,}0'$		$\mathfrak{P}''' = 1{,}2'$		$\mathfrak{P}''' = 0{,}3'$
$C = 12'$		$\mathfrak{P}''' = 9{,}1'$		$\mathfrak{P}''' = 3{,}6'$		$\mathfrak{P}''' = 0{,}8'$
$C = 32'$		$\mathfrak{P}''' = 24{,}3'$		$\mathfrak{P}''' = 9{,}6'$		$\mathfrak{P}''' = 2{,}0'$

Hieraus erhellet, daß man aus dem am Ende (3) angeführten Grunde, φ nicht wohl unter 30° und nicht über 45° nehmen dürfe.

Sollen zwey (seuchtere) Rasten unmittelbar hintereinander gelegt oder eine Rast zweyter Art die nämliche Bewegungsmässigung als eine einzige (tiefere) Rast hervorbringen: so gibt die Gleichung

$$P' = \mathfrak{P}'''$$

$$\text{d. i. } C.\cos.^4\varphi = C.\cos.^8\psi$$

$$\text{also } \cos.\varphi = \cos.^2\psi$$

die Winkel φ, ψ an, bey welchen dieses Statt findet.

Setzt man $\varphi = 60°$, so wird $\psi = 45°$, wie dieß auch aus den Tabellen (3) und (5) hervorgeht. Für $\varphi = 45°$ wird $\psi = 32° 46'$.

ad a) und b) zugleich

Stellen wir die ad a) und ad b) gefundenen Resultate zusammen, und sollen wir für Kasten auf Straßen I) von 0 bis 3 Schuh, dann II) von 3 bis 6 Schuh Steigung allgemeine Regeln angeben: so erhellet, daß der Winkel φ für die einfachen Kasten oder Kasten erster Art im ersten Fall (I) nicht unter 45° und nicht über 60°, im zweyten Fall (II) aber nicht unter und nicht über 60°; für die Kasten zweyter Art im ersten Fall (I) nicht unter und nicht über 45° gemacht werden soll. Da die Kasten zweyter Art im zweyten Fall (II) den größten und nämlichen Winkel φ zu 60° wie die Kasten erster Art erhielten: so sehen wir, daß im zweyten Fall (II), unter Voraussetzung gleicher Bewegungsmässigung, keine Kasten zweyter Art, sondern bloß erster Art anwendbar sind.

Die vortheilhafteste Konstruktion der Kasten muß demnach den Rädern wenigstens zwey Berührungspunkte h und n, deren Bogenentfernung 45° bis 60°, für die Kasten zweyter Art aber 45° beträgt, gestatten; die größten Räder von 4 Fuß Höhe müssen daher in die Kasten erster Art mit 7 bis 12 Zoll, in die Kasten zweyter Art aber mit 7 Zoll eintauchen.

V.

Erklärung eines mechanischen Phönomens.

Zum Schlusse dieses Anhanges sey mir erlaubt auf ein an sich unnützes, für den mathematischen Freund jedoch nicht ganz uninteressantes mechanisches Spiel aufmerksam zu machen.

Wenn man einen Stock mittels seines Bandes in eine Umschwung-Bewegung versetzt: so zeigt sich hierbey das sonderbare Phönomen, daß eine zwischen der Mitte und dem unteru Ende befindliche Stelle des Stockes bloß um sich selbst schwingt, während die übrigen Stellen von dieser Zentral-Stelle ab nach den beyden Enden zu immer größere Kreise beschreiben. Eine sehr geschwinde Schwung-Bewegung des Stockes an einem sehr langen Bande gewährt den Anblick von zwey in der Spitze zusammengesetzten ungleichen Kegeln. Woher diese Erscheinung? Warum fällt jene Zentral-Stelle nicht in das untere Stock-End? Wohin trift dieselbe? Hierüber gebe nachstehender Kalkul Aufklärung!

Man nehme zur Vereinfachung der Rechnung einen gleichförmig schweren, sehr dünen Stock an; dessen Länge sey (Fig. XXVI.) $ab = L$, n die Mitte, c die um sich selbst schwingende Stelle desselben, $ac = l$ also $cb = L - l$, die Länge des Bandes $Ca = S$, der Winkel

$ack = \theta$, $aCk = \delta$, γ die spezifische Schwere des Stockes, c die Geschwindigkeit des gleichförmigen Umschwunges des obern Endes a in der Sekunde, c' diejenige der Stelle x, $ak = r$, $cx = x$, $yx = y$: so ist $r = l. \sin. \theta$, $y = x. \sin. \theta$, $c' = \frac{c. x}{l}$, also $\frac{c'.^2 \gamma. dx}{2 g. y}$ die Centrifugal-Kraft der Stelle x nach der Richtung yx. Diese Kraft wirkt an dem Hebelsarme $am = ky = (l - x) \cos. \theta$, dessen Hypomochlion a ist; also ist $\frac{c'.^2 \gamma. dx. (l-x) \cos. \theta}{2 g. y}$ ihr Moment und $\int \frac{c'^2. \gamma. \cos. \theta (l-x) dx}{2 g. y} = \int \frac{c^2 \gamma \cot. \theta. x (l-x) dx}{2 g l^2} = \frac{c.^2 \gamma. \cot. \theta. l}{12 g} = M$ das Flieh-Moment des Stockes von c bis a nach einer mit yx gleichen Richtung. Auf ähnliche Art findet man $\frac{c^2. \gamma. \cot. \theta}{12 g. l^2} [3 (L - l)^2 l + 2 (L - l)^3] = M'$ für das Flieh-Moment des Stockes von c bis b nach einer mit $y' x'$ gleichen, yx also entgegengesetzten Richtung. Der Schwerpunkt n des ganzen Stockes wirkt nach nc mit der Kraft $\gamma. \sec. \theta. L$, welche von dem Widerstande aH des Bandes aC aufgehoben wird, und nach no mit der Kraft $\gamma. \tan g. \theta. L$ also mit dem Flieh-Moment $\frac{\gamma.}{2} \sin. \theta. L^2 = m$ nach einer mit yx gleichen Richtung.

Die Bedingung, unter welcher c die Zentral- oder Indifferenz-Stelle wird, ist offenbar das Gleichgewicht zwischen den einander entgegengesetzten Flieh-Momen-

ten nämlich die Gleichung (A) . . . $\frac{c.^2 \gamma. \cot. \theta. l}{12g} + \frac{\gamma \sin. \theta. L^2}{2} = \frac{c^2. \gamma. \cot. \theta [3 (L-l)^2 l + 2 (L-l)^3]}{12g. l^2}$ $= M + m = M'$. Da ferner S : 1 = r : sin. δ = l. sin. θ : sin. δ ist: so ergibt sich eine andere Gleichung (B) . . . sin. θ. l = sin. δ. S.

Aus diesen beyden Gleichungen (A) und (B) läßt sich nun θ und l und hiedurch die Zentral-Stelle bestimmen, wenn c und δ gegeben sind.

Anmerkung 1. Wäre anstatt δ die Kraft, mit der das Band von a nach C gehalten werden muß, gegeben: so ließe sich für (B) eine andere Gleichung (B') finden, und aus (A) und (B') die Größen θ und l bestimmen.

Anmerkung 2. Für einen sehr kleinen Werth von θ vorzüglich in Bezug auf c kann man M = M' setzen, wodurch $l = \frac{2}{3} L$ wird. Daß die Zentral-Stelle in keinem Falle in die Mitte des Stockes treffen könne, ist wohl von selbst einzusehen, da der mittlere Hebelsarm des untern Stock-Theiles immer länger als derjenige des obern ist, die Fliehkraft des untern Theiles daher im Gleichgewicht der Momente geringer als diejenige des obern, mithin ac > cb seyn muß.

Anmerkung 3. Die Größe des Widerstandes, den das Band aC nach den Richtungen aH und

ah ausübt, kann leicht nachgewiesen werden. Begreiflich ist der Widerstand aH gleich der Kraft nc$=\gamma.\ \sec.\ \theta.\ L$ und derjenige ah gleich der Differenz der einander entgegengesetzten Flieh-Kräfte nämlich

$$\frac{c^2\gamma}{4g.\ \sin.\theta} + \gamma\,\text{tang.}\ \theta.\ L - \frac{c^2\gamma\,(L-l)^2}{4g.\sin.\ \theta.\ l^2}.$$

Druckfehler.

In dieser Abhandlung.

Seite 13	Zeile 4		lese	v	anstatt	x
" —	" —		"	x	"	v
" 14	" 9		"	$c'n'$	"	$c'N'$
" 41	" 2 v. u.		"	q'	"	q
" 42	" 4	"	"	$tg.\beta)$	"	$tg.\beta$
" 92	" 7	"	"	t	"	t'

In den von mir verfaßten und von Hrn. geh. Rathe Ritter von Wiebeking in den III. Band seiner theoretisch-praktischen Wasserbaukunst II. Auflage aufgenommenen Abhandlungen.

S. 626	Z. 15	lese 0,3551191	anstatt	0,2105242
" 668 in d. Noten	"	Reibungs-Divisor	"	Reibungs-Coefficient.

Fig. I.

Fig. II.

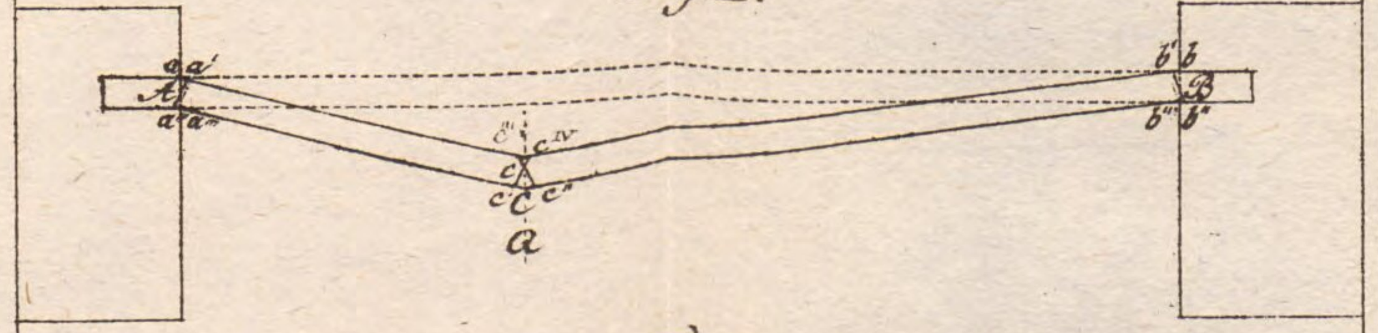


Fig. III.

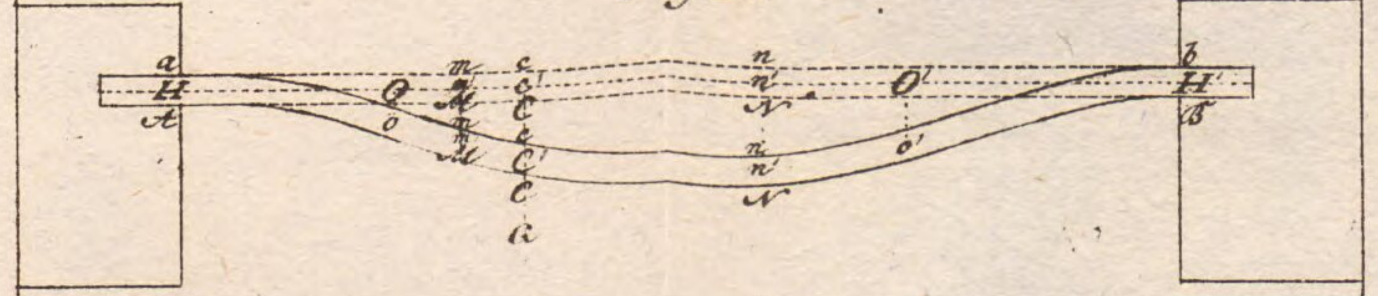


Fig. III.*

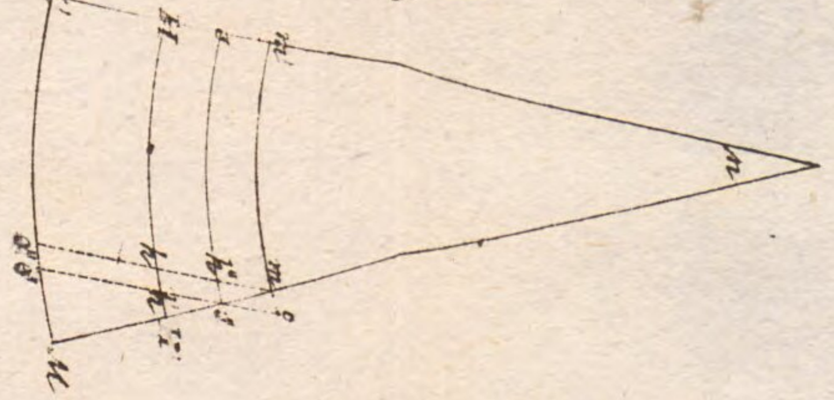


Fig. III.**

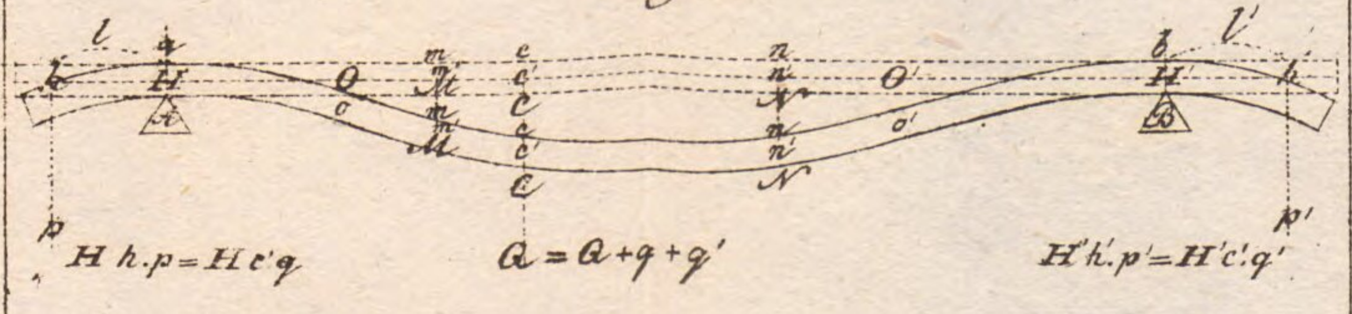


Fig. IV.

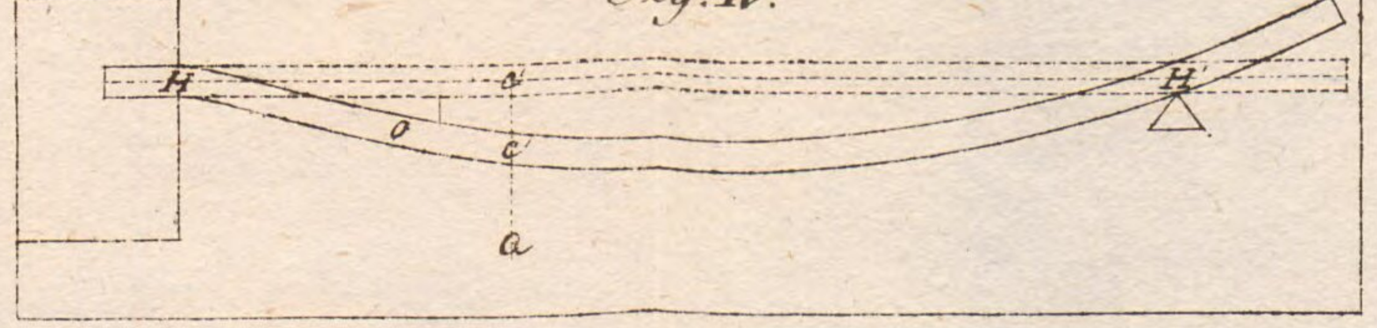


Fig. V.

Fig. V.

Fig. V.

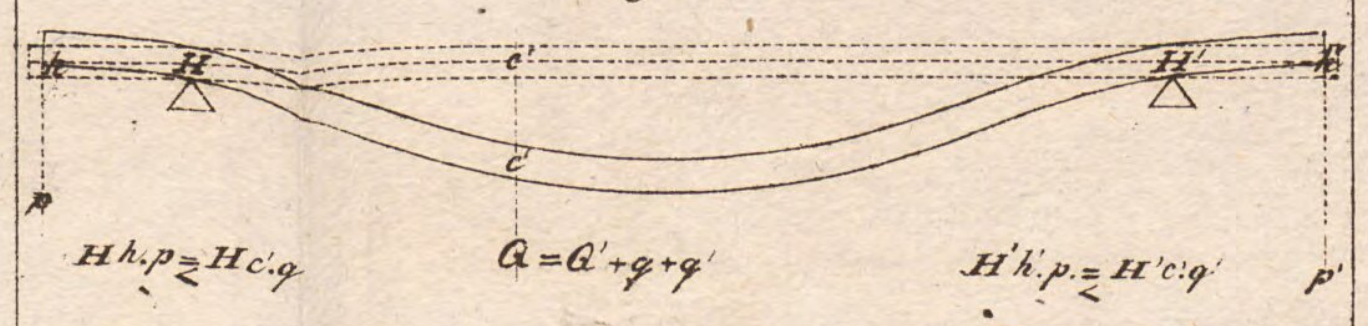


Fig. VI.

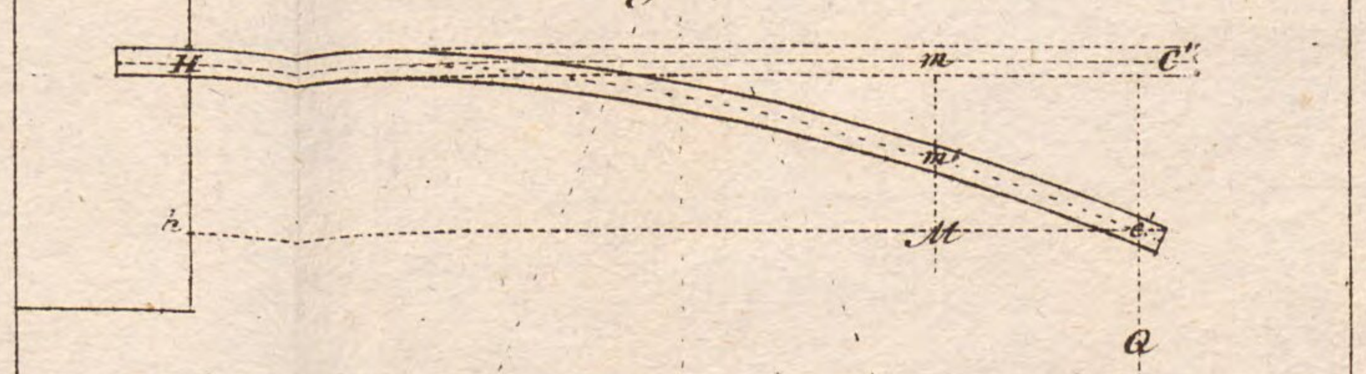


Fig. VII.

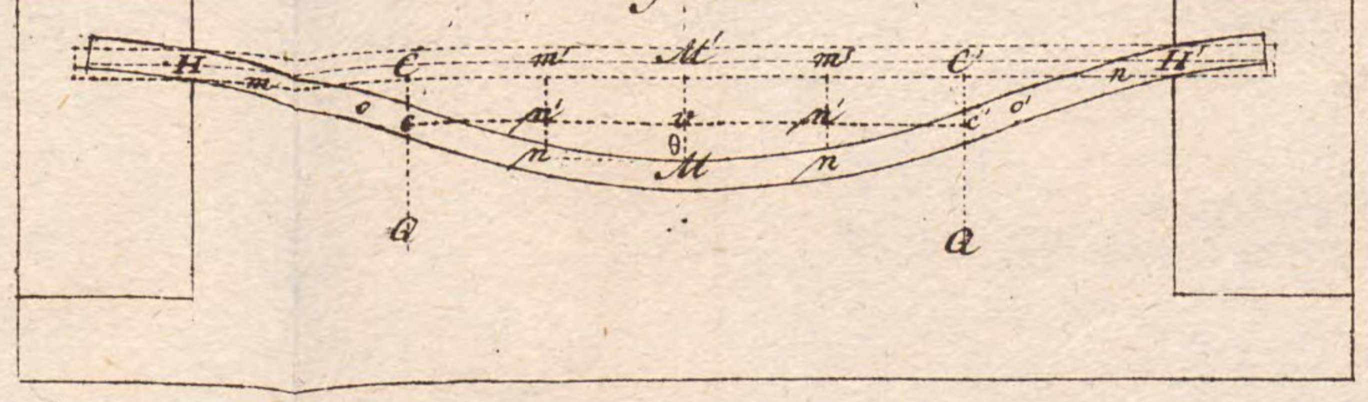


Fig. VIII.

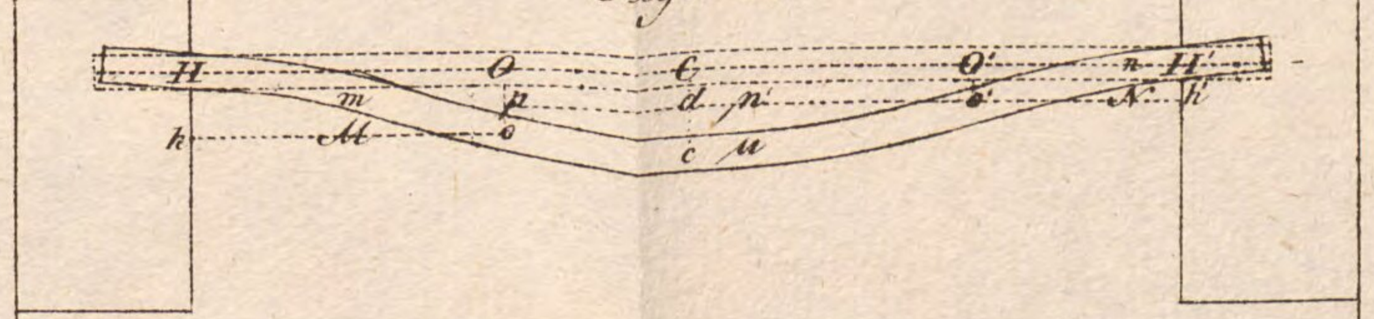


Fig. IX.

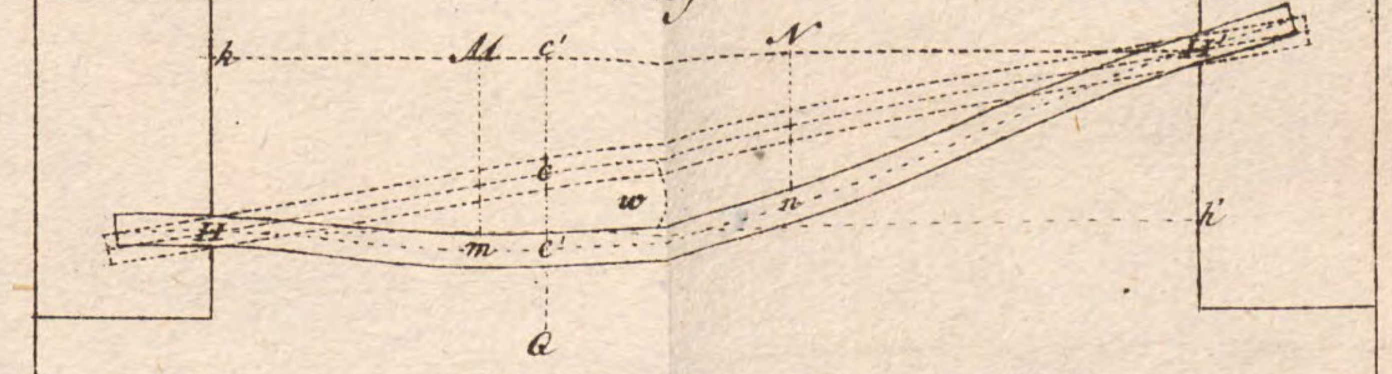


Fig. X.

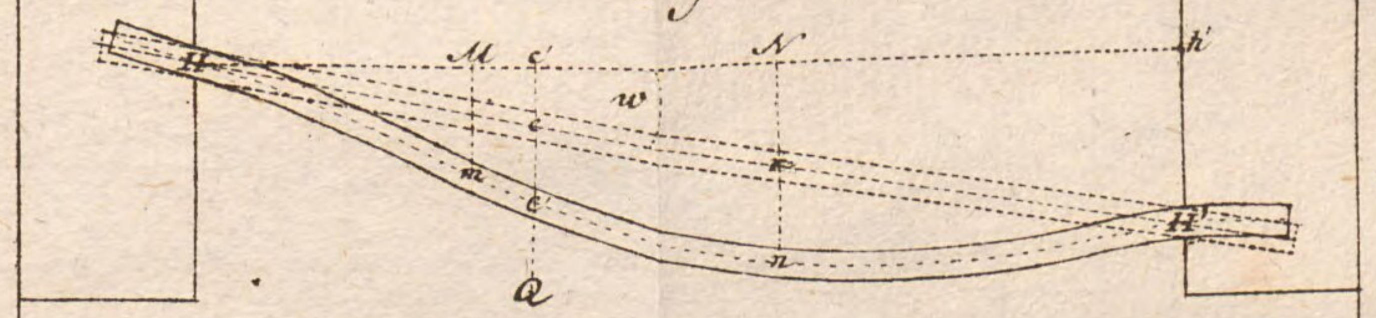
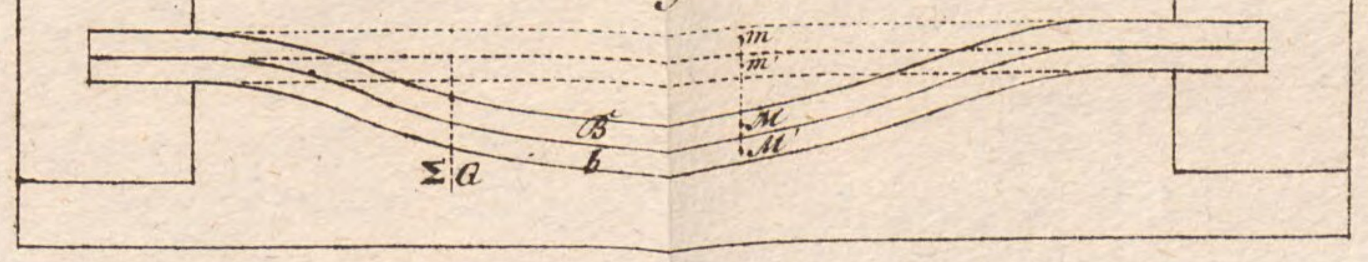
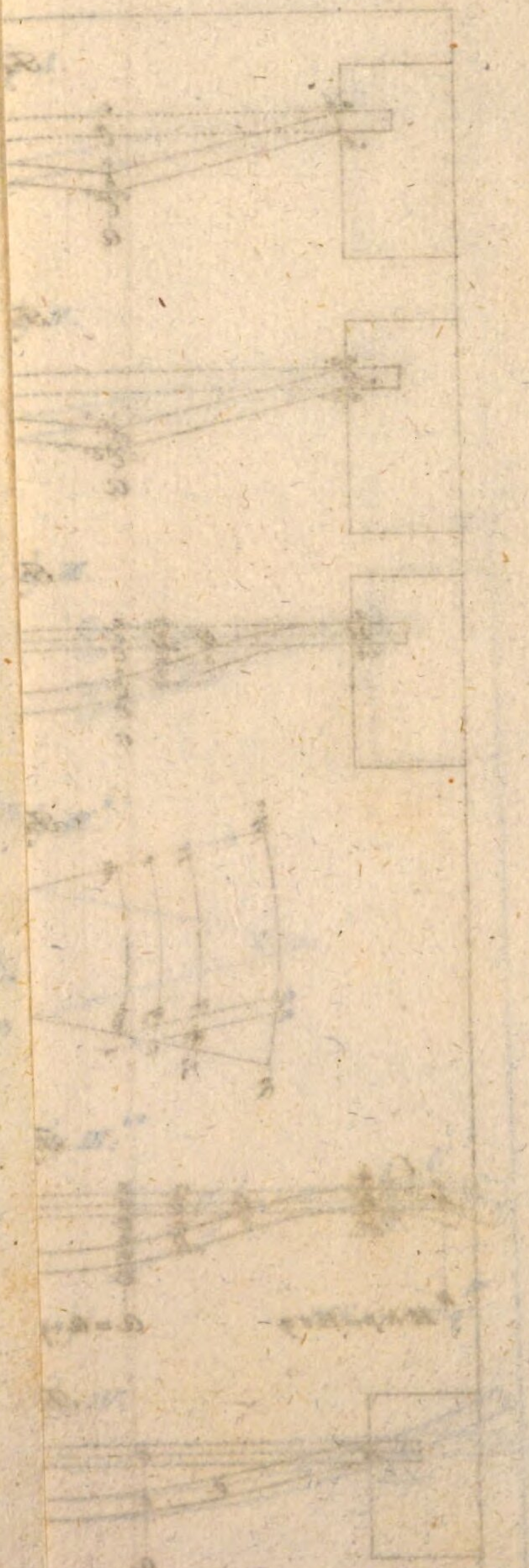


Fig. XI.

Fig. XII.

Fig. XIII.





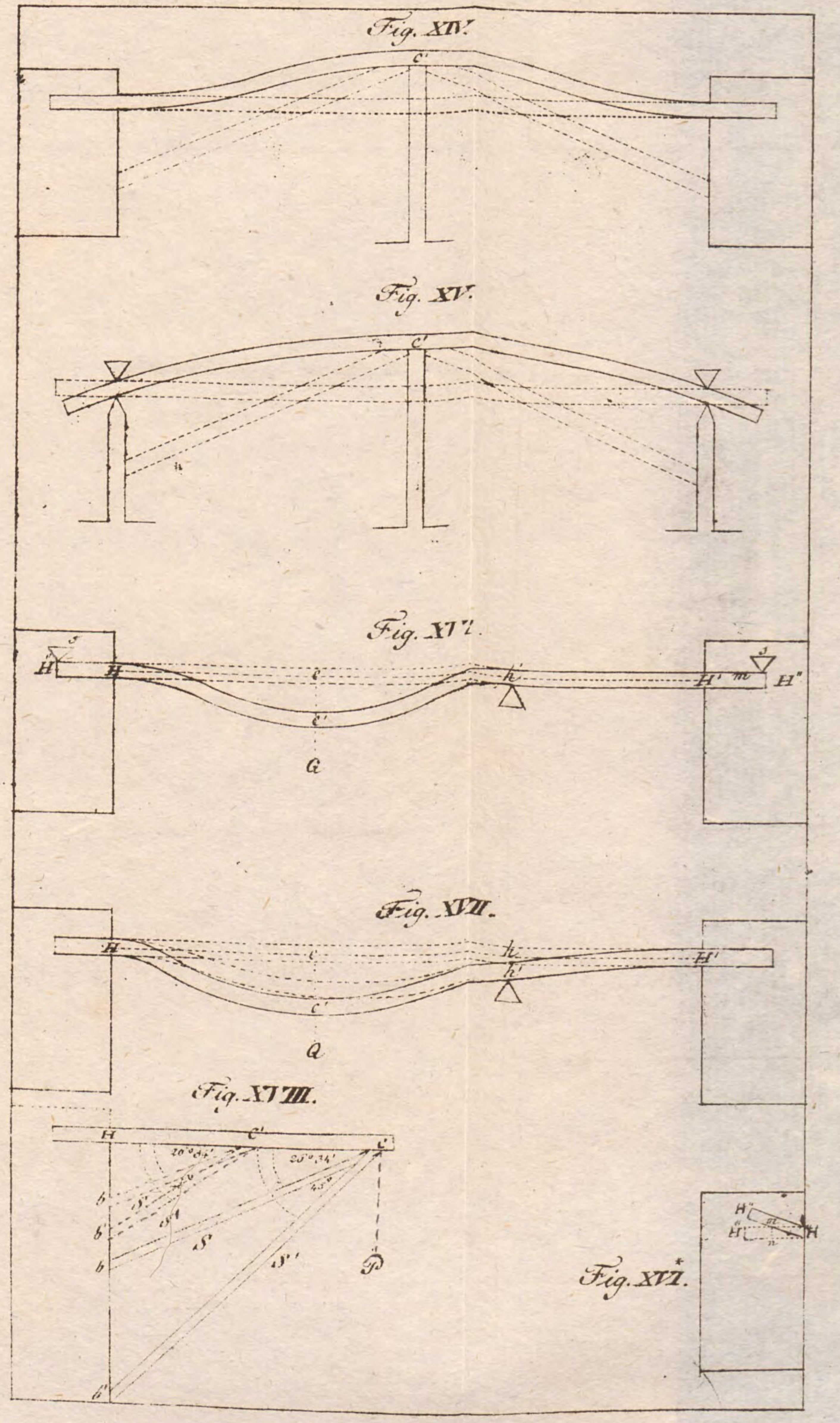


Fig. XIV. Fig. XV. Fig. XVI. Fig. XVII. Fig. XVIII. Fig. XVI*.

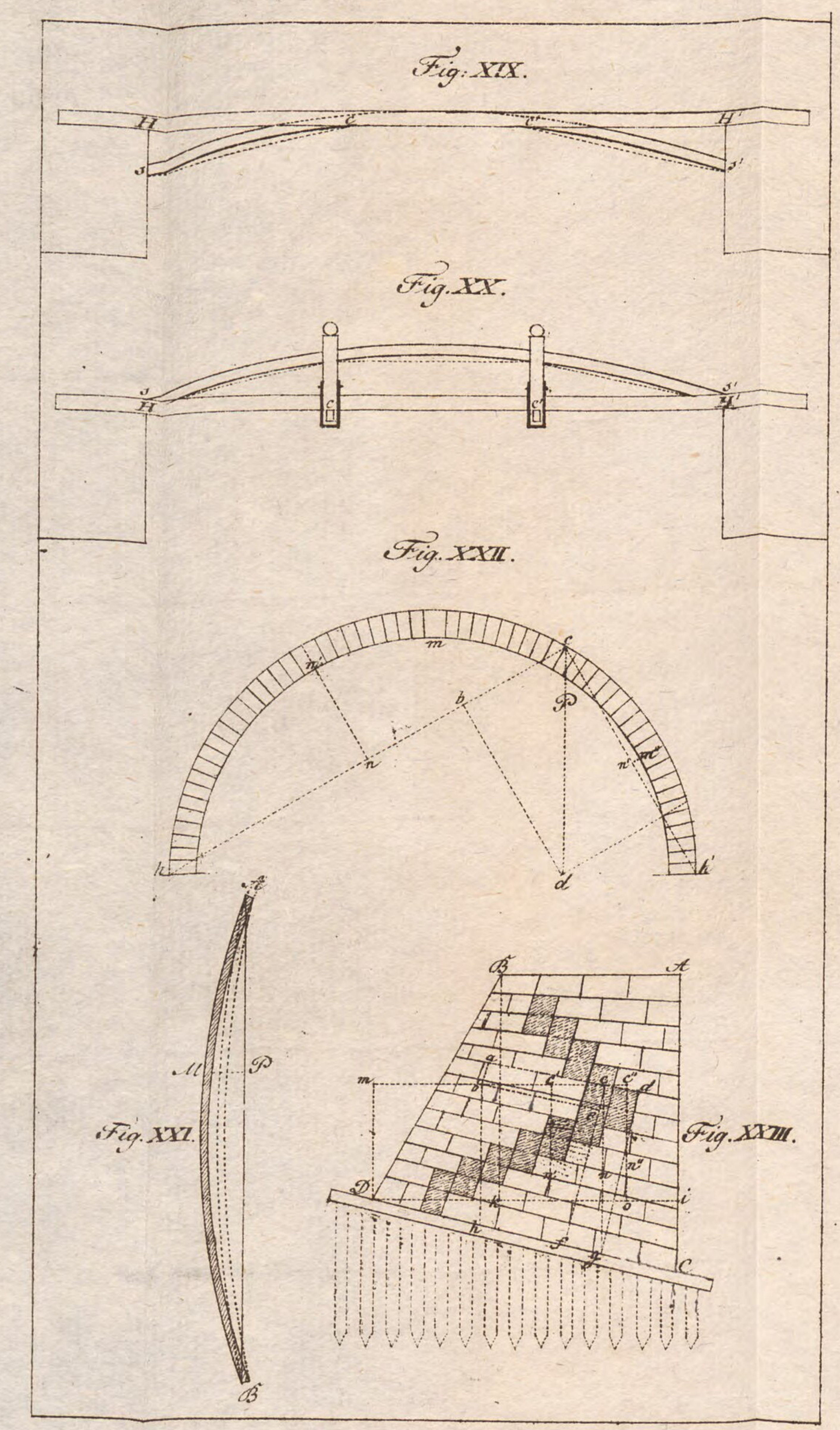


Fig. XIX. Fig. XX. Fig. XXII. Fig. XXI. Fig. XXIII.

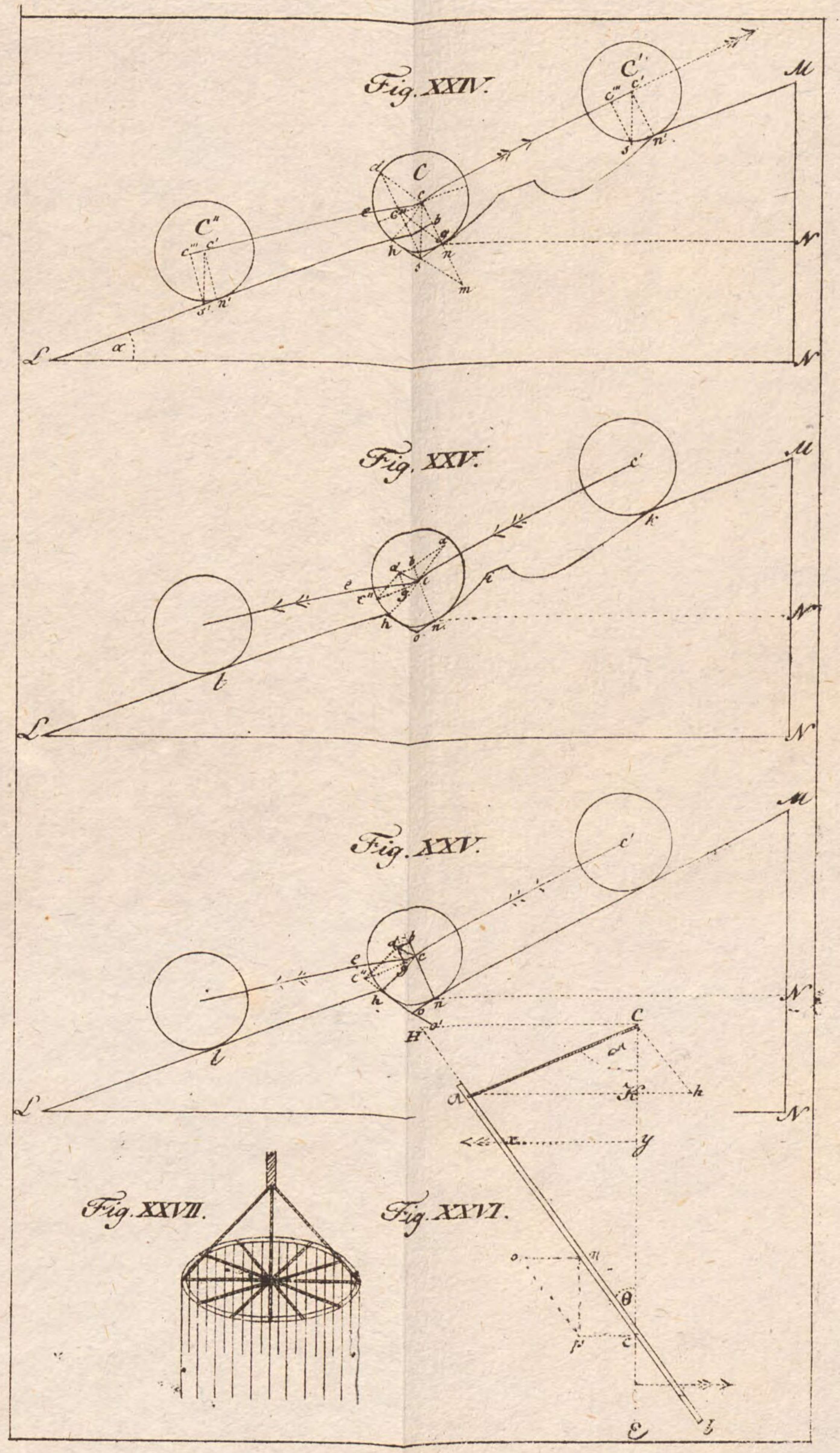
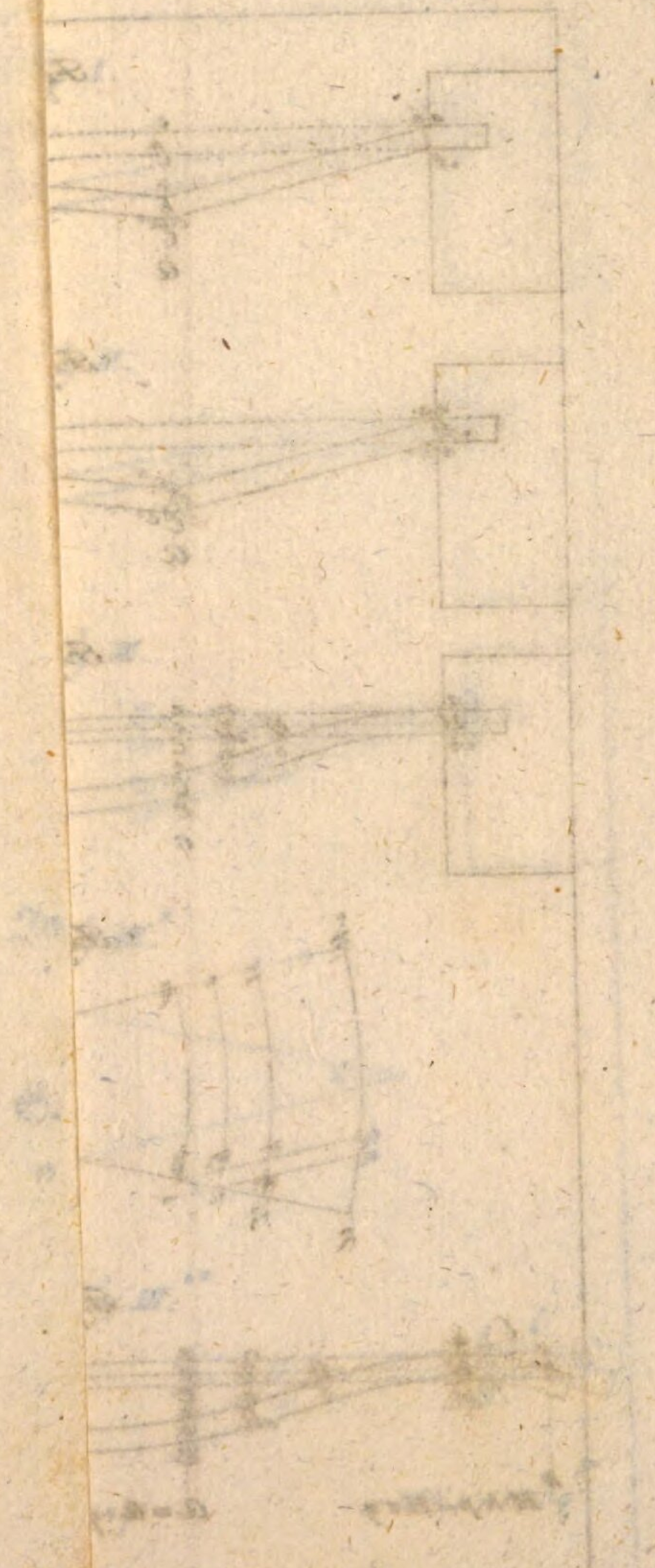
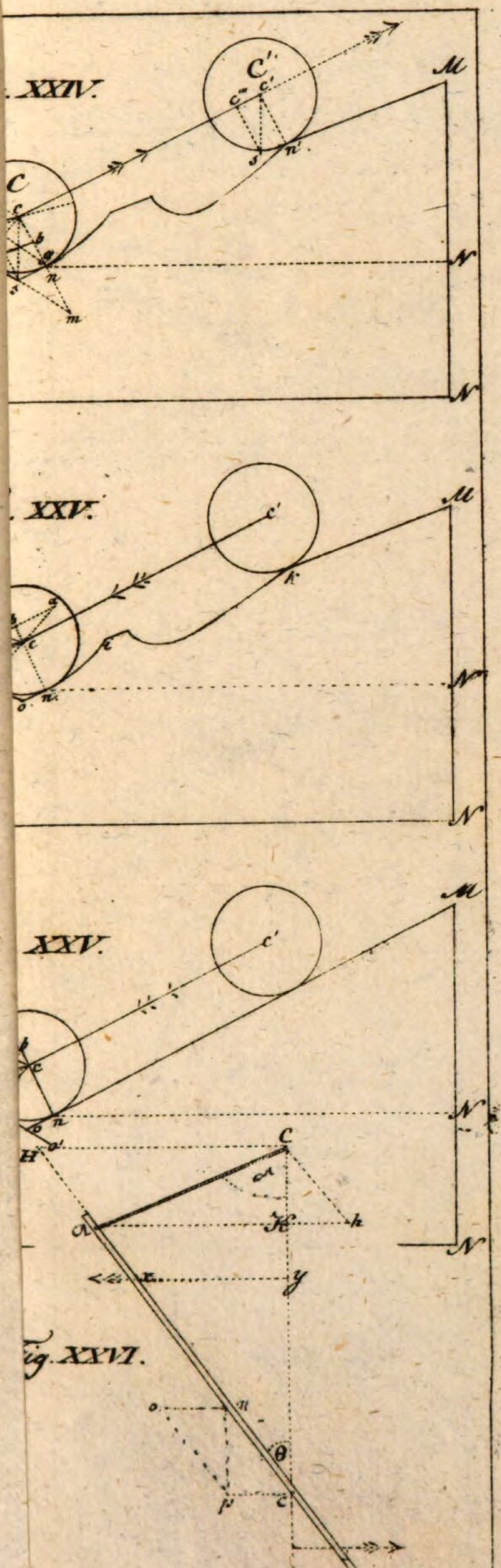


Fig. XXIV. Fig. XXV. Fig. XXV. Fig. XXVII. Fig. XXVI.





. XXIV.
C'
C
M
N
N
. XXV.
c'
M
N
N
XXV.
c'
M
N
N
C
H
y
ig. XXVI.
θ

Bayerische StaatsBibliothek

Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Camerloher, Anton <<von>>,

Erweiterung und Berichtigung der Theorie des Gebälkes

München 1817

A.hydr. 22 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10059794-7